

AJUSTE POSINOMIAL Y SIGNOMIAL MEDIANTE LA GENERACIÓN DE MONOMIALES POR MÉTODOS DE PROGRAMACIÓN NO LINEAL

Nabote António Magaia^{1*}, Isidro Luis Alemán Romero^{2**}, José Arzola Ruiz^{3**} y Osmel Martínez Valdés^{***}

*Instituto Superior Politécnico De Songo (Ispsongo). Av. Agostinho Neto, Barrio Julius Nyerere, Songo, Ciudad De Tete, Mozambique.

**Centro de Estudios de Matemática para las Ciencias Técnicas. Universidad Tecnológica De La Habana “José Antonio Echeverría” (Cujae).

***Empresa Acinox Ingeniería S.A., Calle 20, No. 40, Cotorro.

ABSTRACT

The posynomial and signomial adjustments of functions have been used in engineering and other scientific areas because they allow to model and to solve problems of non-linear and non-convex optimization by applying of the geometric programming model or similar to it. The present work had as objective to propose new techniques of generation of locally optimal monomials using the combination of the methods of the minimum square adjustment and of non-linear programming to improve the quality of monomials generated in search process of parameters. The quality of monomials is measuring by the distance between the best monomial obtained and the original function. For the comparison of the obtained results, two numeric examples of monomial, posynomial and signomial functions adjustment with one and two independent variables were extracted from previously developed works and have showed that the new proposed techniques improve the quality of locally optimal monomials.

KEY WORDS: posynomial and signomial adjustment, monomials generation, non-linear programming, geometric programming.

MSC: 90C30

RESUMEN

Los ajustes posinomial y signomial de funciones han sido empleados en la ingeniería y otras áreas científicas porque permiten modelar y solucionar problemas de optimización no lineal y no convexa mediante la aplicación de programación geométrica o próxima a ella. El presente trabajo tuvo como objetivo proponer nuevas técnicas de generación de monomiales localmente óptimos a partir de la combinación de los métodos de mínimos cuadrados y de programación no lineal para mejorar la calidad de monomiales que se generan en el proceso de búsqueda de parámetros. La calidad de los monomiales generados se mide a través de la distancia entre el mejor monomial obtenido y la función original. Para la comparación de los resultados obtenidos, se extrajeron de otros trabajos anteriormente desarrollados, dos ejemplos numéricos de ajustes monomial, posinomial y signomial de funciones con una y con dos variables y se mostró que las nuevas propuestas mejoran la calidad de monomiales localmente óptimos.

PALABRAS CLAVE: ajuste posinomial y signomial, generación de monomiales, programación no lineal, programación geométrica.

1. INTRODUCCIÓN

Los conceptos de monomiales, posinomiales y signomiales se presentan en la formulación teórica de los problemas de programación geométrica (PG) y próximos a ella [4]. En los últimos años, la PG ha sido de gran interés debido a que, aunque sea un problema complejo de optimización no convexa, se puede convertir, mediante transformaciones logarítmicas de las funciones involucradas, en un problema de optimización

¹ naboteantonio@gmail.com

² ialeman@cemat.cujae.edu.cu

³ jarzola@cemat.cujae.edu.cu.

convexa. Además, tiene muchas aplicaciones en la ingeniería y otras áreas científicas, tales como la Estadística [5] y la Economía [14]. Entre las aplicaciones de la PG en la ingeniería, se destaca el diseño y la optimización de circuitos [6], sistemas de comunicación y la teoría de la información [7], control de potencia de *wireless* en la comunicación vía internet [12], diseño de aeronaves [9, 10], entre otras. A pesar de las ventajas descritas anteriormente, la PG es muy restringida, pues solamente funciones monomiales y posinomiales son integrantes de su estructura matemática. Las funciones signomiales, por su estructura, son una generalización de las polinomiales y, por tanto, permiten un mejor ajuste. Además, posibilitan la modelación en programación geométrica signomial que es una generalización de la PG.

En el año 2007, Boyd et al. [4] presentan varias técnicas de ajuste monomial y posinomial de funciones. El enfoque más sencillo de ajuste monomial consiste en utilizar las técnicas logarítmicas para transformar el problema de ajuste monomial en un problema de regresión lineal. La principal desventaja de esta técnica es que a menudo se utilizan métodos locales para resolver el sistema resultante; otra técnica de ajuste monomial consiste en ajustar los datos a una función *max-monomial* que, posteriormente, se convierte en un problema complejo de programación cuadrática y, desafortunadamente, no resulta práctico. Una de las técnicas de ajuste posinomial presentada en [4], consiste en el ajuste no lineal mínimo cuadrático general que minimice la suma de cuadrados de los errores relativos mediante los métodos locales de Gauss-Newton y de la programación cuadrática secuencial. Otra técnica consiste en determinar primeramente, un ajuste monomial y posteriormente, perturbar sus exponentes $k-1$ veces y considerar la combinación lineal de los k monomiales previamente logrados.

En el 2007, Aggarwal y O'Reilly [1] consideran que la técnica de aproximación posinomial mediante la perturbación de exponentes de los monomiales no está muy clara. Sin embargo, presentan un método que resulta de una combinación entre los algoritmos genéticos y la programación cuadrática para la determinación de modelos posinomiales. Los autores afirman que la minimización de la norma L_2 , el referido método funciona bien y permite lograr buenos resultados pero, teóricamente, no se garantiza el óptimo global.

Arzola y Valdés [3] en el 2008, aportan también un método local de determinación de modelos monomiales y posinomiales a partir de la generación aleatoria de los intervalos, donde se soluciona la tarea de determinación de monomiales localmente óptimos a través de la utilización de los métodos de programación no lineal (PNL). Asimismo, en el año 2009, Magnani y Boyd [15] aportan una versión relativamente sencilla al ajustar los datos a una función *max-monomial*. La nueva versión utiliza las técnicas heurísticas y en la práctica funciona bien, aunque tampoco garantiza alcanzar el óptimo global.

En el 2010, Kim et al. [13] presentan el método de aproximación posinomial de funciones convexas mediante la utilización de funciones afines por partes. La principal desventaja de este enfoque es que se logra un gran número de variables y no resulta práctico para ciertos procedimientos requeridos.

Hoburg y Abbeel [11], en el año 2016, aportan una versión del método referido en el párrafo anterior. El principal aporte desarrollado en este trabajo es la introducción de las funciones *softmax* que generalizan las aproximaciones posinomial y *max-monomial*.

Del análisis anterior se constata que los métodos desarrollados para la aproximación posinomial son locales y desafortunadamente, no garantizan alcanzar el óptimo global. Sin embargo, cuando se considera un número relativamente grande de iteraciones, el enfoque de ajuste posinomial y signomial mediante la generación de monomiales localmente óptimos (GMLO), permite obtener resultados que se acercan al óptimo global. No obstante, la estrategia de acotamiento de los intervalos permisibles para los parámetros de monomiales localmente óptimos, que se utiliza en este enfoque, compromete la calidad de monomiales que se generan, pues estos intervalos pueden ser amplios y/o repetidos sin control alguno.

El objetivo de este artículo es proponer nuevas técnicas de GMLO a partir de la combinación de los métodos de mínimos cuadrados y de programación no lineal para mejorar la calidad de los monomiales que se generan durante el proceso de búsqueda de parámetros de monomiales localmente óptimos. Para lograr este propósito, se supone que si se desarrollan procedimientos de acotamiento de intervalos para los parámetros y estrategias de definición de punto inicial a considerar en los métodos de PNL, se podrá mejorar la calidad de monomiales que se generan. Además, cuando no se considere un gran número de puntos nodales, la combinación de los métodos de PNL con el método de mínimos cuadrados permite lograr los parámetros de monomiales localmente óptimos en un tiempo razonable.

2. CONCEPTOS PRELIMINARES

La función

$$y = cx_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} = c \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \quad (1)$$

se denomina función monomial de las variables positivas x_1, x_2, \dots, x_n . La constante $c > 0$ se denomina coeficiente de la función monomial, y las constantes reales $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ exponentes de la función monomial. Se denomina función posinomial con m términos a la suma de uno o más monomiales, es decir, una función de la forma

$$g(x) = \sum_{k=1}^m c_k x_1^{\alpha_{1k}} x_2^{\alpha_{2k}} \dots x_n^{\alpha_{nk}} = \sum_{k=1}^m c_k \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_{ik}} \quad (2)$$

donde $c_k > 0, \alpha_{ik} \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$, son parámetros y x_i son variables positivas. Si $c_k \in \mathbb{R}$, entonces $g(x)$ se denomina función signomial.

Un problema de programación geométrica se corresponde con la estructura matemática siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } & Z(x) = f_0(x) \\ \text{sujeto a: } & f_i(x) \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & h_j(x) = 1, \quad j = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

Donde f_0, f_1, \dots, f_m , son posinomiales y h_1, h_2, \dots, h_p , son monomiales y $x \in \mathbb{R}_+^n$.

En este artículo, la proximidad entre las funciones original y aproximante se establece a través de la norma p definida por la siguiente expresión:

$$\|f(x_i) - g(x_i)\|_p = \left(\sum_{i=1}^N |f(x_i) - g(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p = \{1, 2, \dots, \{\infty\}\}$$

3. GENERACIÓN DE MONOMIALES LOCALMENTE ÓPTIMOS MEDIANTE LA PNL

Se considera el problema de ajuste monomial de los puntos, $(x^{(i)}, f^{(i)})$, $i = 1, 2, \dots, N$, donde $x^{(i)}$ son vectores positivos y $f^{(i)}$ son constantes positivas, correspondientes a la función original f . La tarea consiste en determinar los valores de los parámetros $c > 0$ y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tales que $cx_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \approx f^{(i)}$. Se supone que el monomial interpola los puntos nodales $(x^{(i)}, f^{(i)})$, $i = 1, 2, \dots, N$, y se soluciona el siguiente problema de optimización no lineal:

$$\text{Minimizar } \|cx_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} - f^{(i)}\|_{\infty} \quad (3)$$

Al considerar la transformación logarítmica $\log|cx_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}| \approx \log|f|$, en el problema de ajuste monomial, se establece el siguiente problema de minimización [4]:

$$\text{Minimizar } \|\log(c^{(i)}) + \alpha_1 \log(x_1^{(i)}) + \dots + \alpha_n \log(x_n^{(i)}) - \log(f^{(i)})\|_{\infty} \quad (4)$$

En el problema de ajuste monomial, la función objetivo se puede representar de varias formas y en [4, 5, 8] se presentan diferentes variantes de técnicas para su modificación. Una de las técnicas consiste en modificar la función objetivo de modo que se minimice el error relativo. En otras ocasiones, se introducen pesos en el objetivo mínimo cuadrático de forma tal que se obtenga un buen ajuste.

En este artículo, los autores proponen dos nuevos enfoques para la GMLO mediante la optimización de problemas sin restricciones. El primero consiste en considerar que $(c, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y se hace un cambio de las variables $c, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ a las nuevas variables $\gamma, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, que se relacionan con las

primeras a través de las igualdades $c = \varphi_0(\gamma, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) > 0, \alpha_1 = \varphi_1(\gamma, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \dots, \alpha_n = \varphi_n(\gamma, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, donde:

- las funciones $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ son continuas;
- las funciones $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ establecen una correspondencia biunívoca continua en ambos sentidos entre los puntos del espacio de aproximación $OCA_1A_2 \dots A_n$ y los puntos de una determinada región $O'\Gamma A_1A_2 \dots A_n$. Por tanto, el problema (3) se puede representar de la siguiente forma:

$$\text{Minimizar } \left\| \varphi_0(\gamma, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot x_1^{\varphi_1(\gamma, \lambda_1, \dots, \lambda_n)} \cdot x_2^{\varphi_2(\gamma, \lambda_1, \dots, \lambda_n)} \dots x_n^{\varphi_n(\gamma, \lambda_1, \dots, \lambda_n)} - f^{(i)} \right\|_{\infty} \quad (5)$$

La ventaja del problema (5) es que, con una selección adecuada de las funciones $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, se puede reducir la cantidad de parámetros que no están restringidos. Por ejemplo, para funciones de una y de dos variables se puede considerar el cambio de variables para las coordenadas polares y esféricas, respectivamente, con el radio vector ilimitado. En el caso de una variable, si se supone que $c = y$ y $\alpha = x$, el ángulo varía de cero hasta π . Suponiendo que $c = z, \alpha_1 = x$ y $\alpha_2 = y$, para funciones de dos variables, los ángulos que representan la longitud y la latitud varían de cero hasta 2π y $\pi/2$, respectivamente.

El segundo enfoque se basa en la aplicación de integrales para la determinación de monomiales localmente óptimos. La técnica consiste en considerar que se conoce el volumen del cuerpo limitado por las superficies $x_1 = I_{x_1}, x_1 = S_{x_1}, x_2 = I_{x_2}, x_2 = S_{x_2}, \dots, x_n = I_{x_n}, x_n = S_{x_n}$ y por la función aproximada f , donde I_{x_j} y $S_{x_j}, j = 1, 2, \dots, n$, se corresponden con los límites inferior y superior de la variable x_i , respectivamente. Suponiendo que $\alpha_j \neq -1, j = 1, 2, \dots, n$, se tiene:

$$cx_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \approx f(x) \Rightarrow c \cdot \int_{I_{x_1}}^{S_{x_1}} x_1^{\alpha_1} dx_1 \int_{I_{x_2}}^{S_{x_2}} x_2^{\alpha_2} dx_2 \dots \int_{I_{x_n}}^{S_{x_n}} x_n^{\alpha_n} dx_n \approx \int_{I_{x_n}}^{S_{x_n}} \left(\int_{I_{x_{n-1}}}^{S_{x_{n-1}}} (\dots f(x)) dx_{n-1} \right) dx_n \Leftrightarrow$$

$$c \cdot \frac{S_{x_1}^{\alpha_1+1} - I_{x_1}^{\alpha_1+1}}{\alpha_1+1} \cdot \frac{S_{x_2}^{\alpha_2+1} - I_{x_2}^{\alpha_2+1}}{\alpha_2+1} \dots \frac{S_{x_n}^{\alpha_n+1} - I_{x_n}^{\alpha_n+1}}{\alpha_n+1} \approx V, \quad V = \int_{I_{x_n}}^{S_{x_n}} \left(\int_{I_{x_{n-1}}}^{S_{x_{n-1}}} (\dots f(x)) dx_{n-1} \right) dx_n \quad (6)$$

Si el monomial interpola el nodo $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$, se obtiene:

$$c^{(i)} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} = f^{(i)} \Leftrightarrow c^{(i)} = \frac{x_1 x_2 \dots x_n \cdot f^{(i)}}{x_1^{\alpha_1+1} x_2^{\alpha_2+1} \dots x_n^{\alpha_n+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

De (6) y (7) se obtiene el siguiente problema de optimización no lineal y sin restricciones:

$$\text{Minimizar } \left\| \frac{x_1^{(i)}}{\alpha_1+1} \cdot \left[\left(\frac{S_{x_1}}{x_1^{(i)}} \right)^{\alpha_1+1} - \left(\frac{I_{x_1}}{x_1^{(i)}} \right)^{\alpha_1+1} \right] \dots \frac{x_n^{(i)}}{\alpha_n+1} \cdot \left[\left(\frac{S_{x_n}}{x_n^{(i)}} \right)^{\alpha_n+1} - \left(\frac{I_{x_n}}{x_n^{(i)}} \right)^{\alpha_n+1} \right] - \frac{V}{f^{(i)}} \right\|_{\infty} \quad (8)$$

El volumen V se puede determinar a través de métodos de integración analítica o numérica.

La optimización del problema (8) puede ser una buena opción para algunas clases de funciones. Generalmente, brinda un buen ajuste cuando se consideran casos donde algunos puntos nodales están muy próximos a los puntos de discontinuidad de la función original. Por ejemplo, la optimización del problema (8) aporta mejores resultados de ajuste monomial de las funciones g y f , que se presentan en los trabajos [4] y [16], respectivamente:

$$f(x_1, x_2) = \exp\left((\log x_1)^2 + (\log x_2)^2\right), \quad S = [0.1, 1] \times [0.1, 1] \subset \mathfrak{R}^2; \quad g(x) = \text{atan}(x), \quad 0.02 \leq x \leq 1.4$$

Fácilmente se puede notar que la técnica de determinación de monomiales a partir de la optimización de los problemas (3) – (5) y (8) tiene algunas desventajas. La principal es que solamente se puede considerar la minimización de la norma infinita. Resulta también desventajoso que la cantidad de iteraciones dependa del número de puntos nodales del problema.

Para solucionar los problemas presentados anteriormente se introduce un parámetro $m \in \mathbb{N}$, donde $m = m_0 + I$, $m_0 = \max_{1 \leq k \leq n} \{\alpha_k^{(1)}\}$, $I = 1, 2, \dots, r$. El $[\alpha_k^{(m)}]$ representa el vector de las partes enteras del número real $\alpha_k^{(m)}$, $k = 1, 2, \dots, n$. El entero m_0 es fijo y los parámetros iniciales $c_0, \alpha_k^{(1)}$, $k = 1, 2, \dots, n$, se corresponden con la solución inicial que se puede lograr a través del método de mínimos cuadrados u otros métodos locales. El parámetro I constituye un número finito de iteraciones en el proceso de búsqueda de coeficientes y exponentes de monomiales localmente óptimos. Es decir, el problema (3) se puede presentar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} \quad \left\| c^{\frac{1}{m}} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n} - (f^{(i)})^{\frac{1}{m}} \right\|_p, \quad p = 1, 2, \dots, \infty, \quad i = 1, 2, \dots, N \\ & \text{sujeto a: } c > 0 \\ & \quad -1 < \beta_k < 1, \quad k = 1, 2, \dots, n \\ & \quad m = |m_0| + I, \quad I = 1, 2, \dots, r; \quad m_0 = \max_{1 \leq k \leq n} \{\alpha_k^{(1)}\}, \quad \alpha_k^{(m)} = m \cdot \beta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (9)$$

Haciendo las transformaciones logarítmicas en el problema de ajuste monomial, el problema (9) se puede presentar cómodamente como en (4), donde \log es un logaritmo de cualquier base, es decir,

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} \quad \left\| \beta_1 \log x_1 + \beta_2 \log x_2 + \dots + \beta_n \log x_n + \frac{1}{m} \log \left(\frac{c}{f^{(i)}} \right) \right\|_p, \quad p = 1, 2, \dots, \infty; \quad i = 1, 2, \dots, N \\ & \text{sujeto a: } c > 0 \\ & \quad -1 < \beta_k < 1, \quad k = 1, 2, \dots, n \\ & \quad m = |m_0| + I, \quad I = 1, 2, \dots, r; \quad m_0 = \max_{1 \leq k \leq n} \{\alpha_k^{(1)}\}, \quad \alpha_k^{(m)} = m \cdot \beta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (10)$$

Al introducir el parámetro $m \in \mathbb{N}$ como en el caso del problema (9), se pueden establecer restricciones en todos los problemas de optimización anteriormente presentados. Por ejemplo, para obtener restricciones en el problema (5), se realiza la sustitución trigonométrica siguiente:

$\frac{\alpha_k}{m} = \sin(\theta_k)$, $-\pi/2 < \theta_k < \pi/2$, (ó $\frac{\alpha_k}{m} = \cos(\theta_k)$, $0 < \theta_k < \pi$), $k = 1, 2, \dots, n$, es decir, el problema (9) se puede representar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} \quad \left\| \sin(\theta_1) \log x_1 + \sin(\theta_2) \log x_2 + \dots + \sin(\theta_n) \log x_n + \frac{1}{m} \log \left(\frac{c}{f^{(i)}} \right) \right\|_p, \quad p = 1, \dots, \infty; \quad i = 1, \dots, N. \\ & \text{sujeto a: } c > 0 \\ & \quad -\pi/2 < \theta_k < \pi/2, \quad k = 1, 2, \dots, n \\ & \quad m = |m_0| + I, \quad I = 1, 2, \dots, r; \quad m_0 = \max_{1 \leq k \leq n} \{\alpha_k^{(1)}\}, \quad \alpha_k^{(m)} = m \cdot \sin(\theta_k), \quad k = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (11)$$

Otra posibilidad en la determinación de monomiales localmente óptimos consiste en utilizar las técnicas heurísticas para determinar el(los) punto(s) inicial(es) en el área de aproximación acotada y, posteriormente, aplicar los métodos de PNL.

4. ESTRATEGIAS DE DEFINICIÓN DE PUNTO INICIAL

La GMLO a partir de las técnicas de PNL, depende de las selecciones del método de PNL, de puntos nodales y de punto inicial a considerar. Si no se desea generar aleatoriamente el punto inicial X_0 , los autores proponen las siguientes estrategias:

(E1) El punto inicial X_0 se mantiene fijo o invariable

Esta estrategia no posibilita la exploración de varias regiones que puedan contener la solución óptima del problema, considerando que, en cada iteración, se parte del mismo punto para la búsqueda de parámetros de los monomiales localmente óptimos. Ésta es una buena opción cuando se dispone de la información relativa a la localización de la solución óptima, pues se puede fijar el punto inicial de tal forma que se explore la región factible en un tiempo razonable.

(E2) El punto inicial X_0 es variable y se corresponde con los parámetros del monomial que brinda el máximo error de aproximación, entre todos los monomiales anteriormente generados

A partir de esta estrategia se puede generar los monomiales localmente óptimos, ampliando la región de búsqueda de la solución. Nótese que, en esta estrategia, el punto inicial se mueve de tal forma que se distancie de la solución óptima del problema.

(E3) El punto inicial X_0 es variable y se corresponde con los parámetros del monomial que aporta el mínimo error de aproximación, entre todos los monomiales anteriormente logrados

Utilizando esta estrategia tampoco se exploran varias regiones que posiblemente contengan soluciones locales deseables, aunque exista la posibilidad de una convergencia rápida. En esta estrategia, el punto inicial se disloca hacia la solución óptima del problema considerado.

(E4) El punto X_0 es variable y se corresponde con los parámetros del monomial anteriormente generado

Esta estrategia utiliza en simultáneo las tres anteriores. Sin embargo, el punto inicial X_0 se mueve constantemente y puede aproximarse o alejarse de la solución óptima, por lo que en general, se hace una exploración de varias regiones, aunque el movimiento del punto inicial dependa del monomial anteriormente generado.

5. ALGORITMO DE GENERACIÓN Y SELECCIÓN DE MONOMIALES LOCALMENTE ÓPTIMOS

Los autores proponen a continuación, el algoritmo general de GMLO a partir de métodos de PNL, Figura 1. En el presente trabajo, los autores proponen una estrategia para establecer los acotamientos de los parámetros c_i . La estrategia se basa en considerar que $0 \leq c_0 \leq Sc_0 = \max\{Sc_1, Sc_2, \dots, Sc_n\}$, $0 \leq c_i \leq Sc_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, donde Sc_1, Sc_2, \dots, Sc_n , son los coeficientes de los monomiales $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, \dots , $\varphi_n(x)$, respectivamente. Por tanto, la tarea de determinación de coeficientes del posinomial se soluciona con métodos de PNL para optimizar el problema siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} \left\| c_0 + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) - f^{(j)} \right\|_p, \quad p = 1, 2, \dots, \infty, \quad j = 1, 2, \dots, N \\ & \text{sujeto a: } 0 \leq c_0 \leq Sc_0 \\ & \quad \quad \quad \vdots \\ & \quad \quad \quad 0 \leq c_n \leq Sc_n \end{aligned} \tag{13}$$

Para lograr el modelo signomial se soluciona el problema (13) pero, en este caso, no se consideran las restricciones, es decir, $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$. En [2] se presentan varios métodos de búsqueda directa y de gradiente para solucionar los problemas de optimización que se presentan en este artículo.

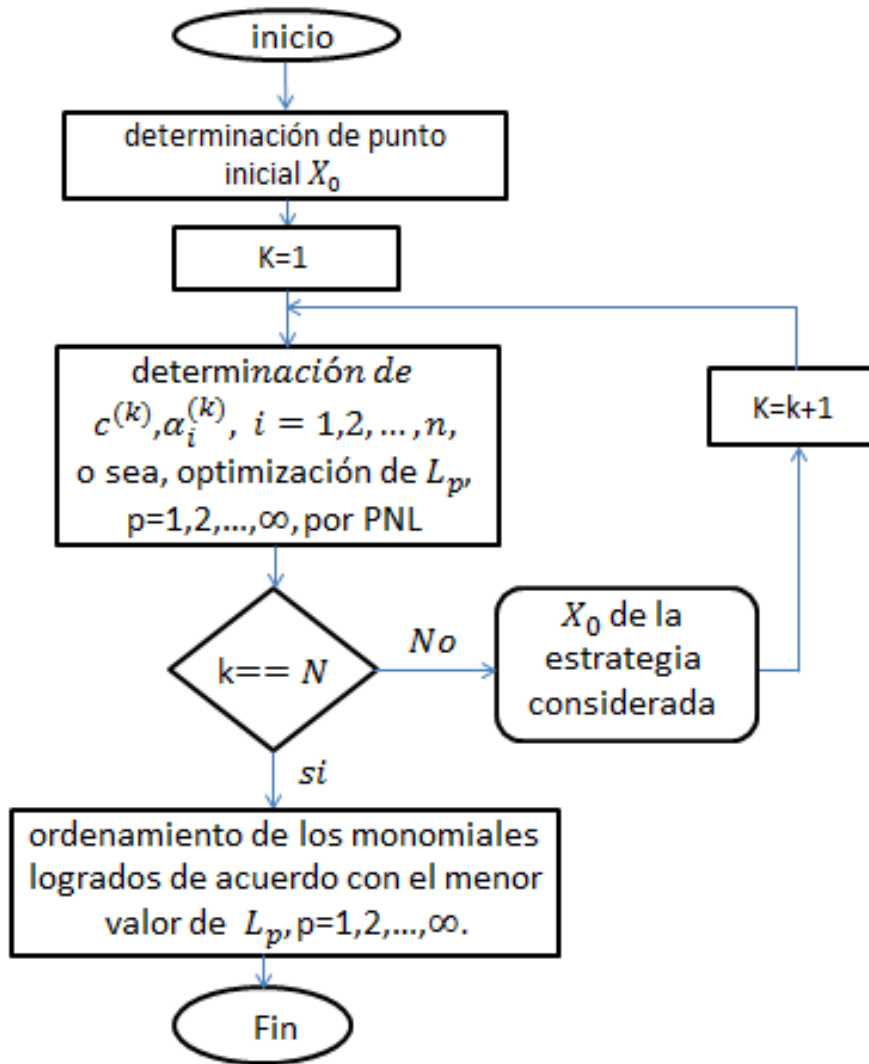


Figura 1: Algoritmo de GMLO a partir de métodos de PNL.

6. EJEMPLOS NUMÉRICOS

En el presente trabajo, los problemas de optimización no lineal se solucionan a través de las funciones *fminsearc*, *fminunc*, *lsqnonlin* y *fmincon*, implementadas en *MATLAB*. Se considera la norma de *Chebyshev* para determinar la distancia entre la función original y la aproximante. En la optimización del problema (9), se tiene en cuenta la generación de 100 monomiales localmente óptimos, es decir $I = 1, 2, \dots, 100$.

Ejemplo 1. Caso de función de una variable con expresión analítica conocida

En este ejemplo se considera el problema de aproximación monomial de la función $f(x) = \sqrt{1 - (x - 1)^2}$, tomada del trabajo [4], donde se utilizan 100 puntos igualmente espaciados del intervalo $[0.1; 1]$. En [4] se

utilizaron diferentes técnicas para la aproximación monomial de f : a partir de la técnica de aproximación local en el punto $x = 0.5$, se obtuvo el error máximo de $9.11 \cdot 10^{-2}$; mediante el método de mínimos cuadrados se logró el error máximo de $6.95 \cdot 10^{-2}$; y la técnica de minimización del error relativo brindó el error máximo de $5.39 \cdot 10^{-2}$.

La tabla a continuación presenta la comparación de los errores máximos de ajuste monomial derivados de la optimización de los problemas (3) – (5), (8), (9) y (11), utilizando la función $fminunc$:

Tabla 1: Comparación de los errores máximos de aproximación monomial de $f(x)$.

Técnica utilizada para el ajuste monomial de $f(x)$	Estrategia (E1)	Estrategia (E2)	Estrategia (E3)	Estrategia (E4)
Optimización de los problemas (3) y (4)	$4.93 \cdot 10^{-2}$	$4.32 \cdot 10^{-2}$	$5.84 \cdot 10^{-2}$	$4.54 \cdot 10^{-2}$
Optimización del problema (5) ⁴	$4.95 \cdot 10^{-2}$	$4.59 \cdot 10^{-2}$	$4.50 \cdot 10^{-2}$	$4.50 \cdot 10^{-2}$
Optimización del problema (8)	$5.62 \cdot 10^{-2}$	$5.62 \cdot 10^{-2}$	$5.62 \cdot 10^{-2}$	$5.62 \cdot 10^{-2}$
Optimización del problema (9)	$4.97 \cdot 10^{-2}$	$4.48 \cdot 10^{-2}$	$5.84 \cdot 10^{-2}$	$5.08 \cdot 10^{-2}$
Optimización del problema (11)	$4.96 \cdot 10^{-2}$	$4.50 \cdot 10^{-2}$	$6.09 \cdot 10^{-2}$	$5.63 \cdot 10^{-2}$

A partir de la tabla anterior se observa que los mejores resultados de aproximación monomial de la función f se obtuvieron con la aplicación de la estrategia (E2), en la optimización de los problemas (3) y (4). El respectivo modelo monomial se corresponde con la expresión analítica $mon_f(x) = 1.0412x^{0.3392} \approx f(x)$, $0.1 \leq x \leq 1$.

Ejemplo 2. Caso de función de dos variables con expresión analítica desconocida

Para esto se considera el ejemplo 1 del trabajo [3], donde se necesita hallar las funciones de aproximación monomial, posinomial y signomial, a partir de las combinaciones sucesivas de las primeras funciones monomiales generadas para estimar la temperatura interna (T_{int}) de una pared refractaria. La temperatura interna se considera como una función que depende del espesor de su primera capa (S) y de la temperatura externa ($Text$) de la pared y, tomando 360 resultados de cálculo, se buscan sus modelos monomial, posinomial y signomial.

Tomando los 360 puntos referentes a la función T_{int} de variables S y $Text$, se generaron funciones monomiales localmente óptimas a través de la aplicación de las cuatro estrategias en la optimización de los problemas (3) – (5), (8), (9) y (11). Al considerar como punto inicial la solución obtenida a través del método de mínimos cuadrados, se presentan los resultados de optimización de distintos problemas a través de la función $fminunc$.

Tabla 2: Comparación de los errores máximos de ajuste monomial de $T_{int}(S, Text)$.

Técnica utilizada para el ajuste monomial de $T_{int}(S, Text)$	Estrategia (E1)	Estrategia (E2)	Estrategia (E3)	Estrategia (E4)
Optimización de los problemas (3) y (4)	11.8358	11.8473	11.8397	11.7150
Optimización del problema (5) ⁵	11.7482	13.0895	11.9735	13.6290
Optimización del problema (8)	13.6290	13.6290	13.6290	13.6290
Optimización del problema (9)	11.5140	11.6782	11.5346	11.6076
Optimización del problema (11)	11.6728	11.6195	12.0132	11.4848

El mejor ajuste monomial se logró con la aplicación de la estrategia (E4) en la optimización del problema (11) y se corresponde con el error máximo de 11.484786. A continuación, se presenta la expresión analítica del respectivo modelo:

⁴ Se realizó el cambio de variables para las coordenadas polares.

⁵ Se hizo el cambio de variables para las coordenadas esféricas.

$$T_{\text{int}}(S, \text{Text}) = 2.7210855 \cdot S^{0.27008305} \cdot \text{Text}^{0.84759467}$$

Al considerar el error estándar como criterio de proximidad entre las funciones original y aproximante, se obtiene la siguiente tabla de resultados:

Tabla 3: Comparación de los errores estándares de ajuste monomial de $T_{\text{int}}(S, \text{Text})$.

Técnica utilizada para el ajuste monomial de $T_{\text{int}}(S, \text{Text})$	Estrategia (E1)	Estrategia (E2)	Estrategia (E3)	Estrategia (E4)
Optimización del problema (9)	5.3884	5.3884	5.3884	5.3884
Optimización del problema (10)	5.3885	5.3885	5.3885	5.3885
Optimización del problema (11)	5.3883	5.3872	5.3884	5.3872

En este caso, el mejor modelo monomial se logró con la aplicación de las estrategias (E2) y (E4), en la optimización del problema (11) y se corresponde con la siguiente expresión analítica:

$$T_{\text{int}}(S, \text{Text}) = 2.6959177 \cdot S^{0.27147721} \cdot \text{Text}^{0.84771278}$$

El modelo posinomial se logra con la utilización de la función *fmincon* para optimizar el problema (13). Nótese que la calidad de ajuste posinomial depende de monomiales anteriormente generados. Por ejemplo, tomando la combinación sucesiva de los primeros 30 monomiales localmente óptimos, generados a través de la optimización del problema (3), se puede observar, a partir de la figura 2, que el óptimo posinomial tiene tres términos y brinda un error máximo de 11.4556005.

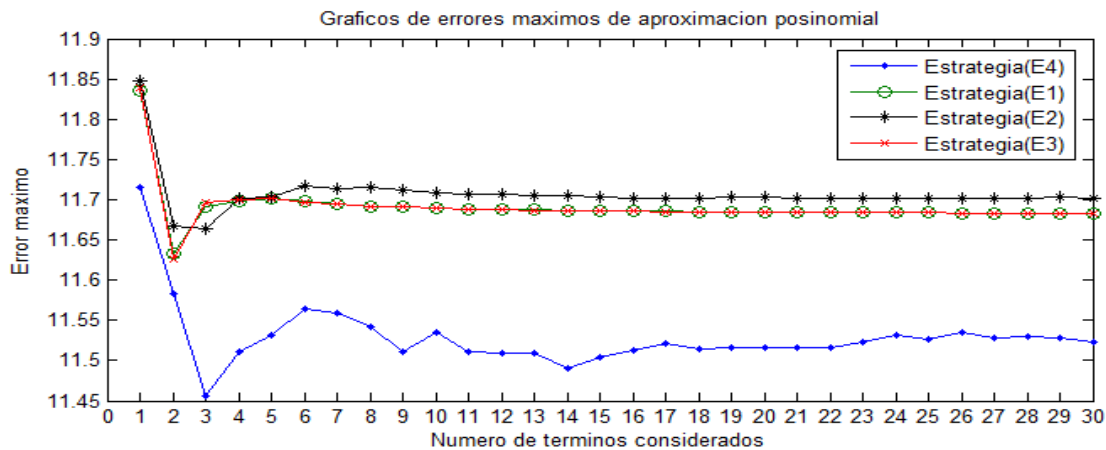


Figura 2: Gráficos de errores máximos de aproximación posinomial versus número de términos.

Sin embargo, aplicando la estrategia (E1), en la optimización del problema (9), se logra un posinomial formado por dos términos y con un error máximo de 11.2882 que se corresponde con la siguiente expresión analítica:

$$T_{\text{int}}(S, \text{Text}) = 2.7240851 + 2.7201974 \cdot S^{0.27029518} \cdot \text{Text}^{0.84706586}$$

Ahora bien, es pertinente comparar los errores de ajuste posinomial que se lograron con la aplicación de diferentes estrategias de definición de punto inicial para verificar si, estadísticamente, las diferencias de los resultados obtenidos son significativas. Utilizando el *software SPSS* para comparar los errores máximos a partir de las pruebas de hipótesis de *Kruska-Wallis*, se puede observar en las tablas 4 y 5, que hay evidencias estadísticas suficientes para que se rechace la hipótesis de que no existen diferencias significativas entre los errores máximos de aproximación posinomial mediante la aplicación de las cuatro estrategias, con un 95% de nivel de confianza.

Tabla 4. Rangos medios de los errores de aproximación posinomial.

Ranks		
Rango	N	Mean Rank
<i>Estrategia</i>		
1	30	61.97
2	30	98.70
3	30	62.97
4	30	18.37
Total	120	

Tabla 5. Estadísticas de la prueba para los errores de aproximación posinomial.

Test Statistics ^{a,b}	
	<i>Estrategia</i>
Chi-Square	80.397
df	3
Asymp. Sig.	0.000

a. Kruskal Wallis Test

b. Grouping Variable: Rango

Por otro lado, se puede mostrar mediante las pruebas de hipótesis de *Kruskal-Wallis* y de *Mann Whitney-Wilcoxon* que hay evidencias estadísticas suficientes para que no se rechace la idea de que no hay diferencias significativas entre los errores máximos resultantes de aplicación de las estrategias (E1) y (E3), con un 95% de nivel de confianza.

Para la obtención del modelo signomial se utilizó la función *fminsearch* para optimizar el problema (13), pero sin considerar las respectivas restricciones. Por ejemplo, al considerar los primeros 5 monomiales localmente óptimos, generados previamente a partir de la optimización del problema (9), se logra un error máximo de 11.215205 cuya expresión analítica se presenta a continuación:

$$T \text{ int}(S, \text{Text}) = 6.5967216 + 1.4265818 \cdot S^{0.27029518} \cdot \text{Text}^{0.84706586} + 5.5876369 \cdot S^{0.27029291} \cdot \text{Text}^{0.84706775} - 4.172809 \cdot S^{0.27030156} \cdot \text{Text}^{0.84705939} - 1.1620327 \cdot S^{0.27030413} \cdot \text{Text}^{0.84705756} + 1.0326108 \cdot S^{0.27029237} \cdot \text{Text}^{0.84706801}$$

7. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Al comparar los resultados obtenidos con los que se lograron en [4] y [3], se observó que las nuevas propuestas mejoraron la calidad de monomiales localmente óptimos y, consecuentemente, las aproximaciones posinomial y signomial. En [4], el mejor resultado de ajuste monomial se obtuvo a través de la minimización del error relativo y aportó un error máximo de $5.39 \cdot 10^{-2}$, mayor que $4.32 \cdot 10^{-2}$ que se logró con la optimización de los problemas (3) y (4). A partir del ejemplo numérico 2, se verificó que con el mejor monomial localmente óptimo que se obtuvo en [3], se logró un error máximo de 16.5832982, considerablemente mayor que 11.484786, resultante de la aplicación de la estrategia (E4) en la optimización del problema (11). Al comparar los errores estándares se verificó que en [3], se logró un modelo monomial que brindó un error de 5.9051, mayor que 5.3872, resultante de la aplicación de la estrategia (E2) o (E4) en la optimización del problema (11).

Si se comparan los ajustes posinomial y signomial se logra que el modelo signomial mejoró la calidad de aproximación entre las funciones original y aproximante.

Considerando las limitaciones de los métodos determinísticos para solucionar problemas complejos, en los estudios futuros, se estudiará la utilización de técnicas heurísticas para el ajuste posinomial mediante la generación de monomiales localmente óptimos.

8. CONCLUSIONES

Se constata que las nuevas propuestas mejoran la calidad de monomiales localmente óptimos que se generan. Además, la combinación lineal de los mejores monomiales previamente generados y ordenados de acuerdo con la función objetivo, permite lograr un buen ajuste posinomial y/o signomial de funciones. Las funciones monomiales, posinomiales y signomiales que se generan, se pueden utilizar para modelar y solucionar problemas de optimización no lineal y no convexa mediante la aplicación de programación geométrica o próxima a ella.

RECEIVED: FEBRUARY, 2017

REVISED: NOVEMBER, 2017

REFERENCIAS

- [1] AGGARWAL, V. and O'REILLY, U. M. (2007): Simulation - Based Reusable Posynomial Models for MOS Transistor Parameters. **Design, Automation and Test in Europe Conference, Nice.**
- [2] ARZOLA, R. J. (2012): **Sistemas de Ingeniería.** Félix Varela, La Habana.
- [3] ARZOLA, R. J. y VALDÉS, O. M. (2008): Elaboración de Funciones de Aproximación Monomiales, Posinomiales y Signomiales. **XIV Convención Científica de Ingeniería y Arquitectura, La Habana.**
- [4] BOYD, S., KIM, S. J., VANDENBERGHE, L. and HASSIBI, A. (2007): A tutorial on Geometric Programming. **Optimization and Engineering**, 8, 67-127.
- [5] BOYD, S.; KIM, S. J. and VANDENBERGHE, L. (2004): **Convex Optimization.** Cambridge University Press, New York.
- [6] BOYD, S., KIM, S. J., PATIL, D. D. and HOROWITZ, M.A. (2005): Digital Circuit Optimization via Geometric Programming. **Operations Research**, 53, 899-932.
- [7] CHIANG, M. and BOYD, S. (2004): Geometric Programming Duals of Channel Capacity and Rate Distortion. **IEEE Transactions on Information Theory**, 50, 245-258.
- [8] GAUTSCHI, W. (2012): **Numerical Analysis.** Springer Science + Business Media, New York.
- [9] HOBURG, W. and ABBEEL, P. (2014): Geometric programming for aircraft design optimization. **AIAA Journal**, 52, 1-13.
- [10] HOBURG, W. (2013): Aircraft Design optimization as a Geometric programming. Ph. D. Dissertation. University of California, Berkeley. Available at: <https://pdfs.semanticscholar.org/5946/96e476f73c443fee387df971963cb90a0645.pdf>. **Consultado** el: 7-9, 2016.
- [11] HOBURG, W, KIRSCHEN, P. and ABBEEL, P. (2016): Data fitting with geometric – programming – compatible softmax functions. **Optimization and Engineering**, 14, 897-918.
- [12] KANDUKUR, S. and BOYD, S. (2002): Optimal Power Control in Interference-Limited Fading Wireless Channels With Outage-Probability Specifications. **IEEE Journal on Wireless Communications**, 1, 46-55.
- [13] KIM, J., VANDENBERGHE, L. and YANG, C. K. K. (2010): Convex piecewise-linear modeling method for circuit optimization via geometric programming. **IEEE Transactions Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems**, 29, 1823-1827.
- [14] LEUNG, K. N. F. (2007): A generalized geometric – programming solution do An economic product ion quantity model with flexibility and reliability considerations. **European Journal of Operational Research**, 176, 240 – 251.
- [15] MAGNANI, A. and BOYD, S. (2009): Convex piecewise-linear fitting. **Optimization and Engineering**, 10, 1-17.
- [16] XUE, X. (2012): Electronic Systems Optimization Design via GP-Based Surrogate Modelling. Ph. D. Dissertation. North Carolina State University, North Carolina. Available at: <http://repository.lib.ncsu.edu/ir/bitstream/1840.16/7710/1/etd.pdf>. **Consultado** el 5-7, 2016.