

# DESARROLLO DE LA MODELACIÓN ESTADÍSTICO-MATEMÁTICA EN LAS CIENCIAS AGRARIAS. RETOS Y PERSPECTIVAS

Lucía Fernández Chuairey<sup>1</sup>; Caridad Walkiria Guerra Bustillo; Josefina de Calzadilla Pereyra; Nelson Ulises Lim Chang  
Universidad Agraria de la Habana, (Cuba).

## ABSTRACT

Statistical-Mathematical Modeling of Processes constitutes an indispensable tool for the efficient development of scientific investigations and the search for solutions and optimal productions. The present work aims to divulge some experiences and results achieved in the modeling of processes in Agricultural Sciences. Development of Biomathematics is shown briefly, from a multidisciplinary work between mathematicians, statisticians and specialists. Evolution in non-linear regressions and the proposal of initial parameters from their mathematical-biological interpretations are presented. Examples are included ranging from animal and plant growth models (Logistic, Gompertz and Von-Bertalanffy models), allometric growth and lactation curves, to models used in genetic improvement programs (with the use of weighing on the control day and random regressions). The methodologies that are part of these and other investigations have been introduced and generalized in undergraduate and postgraduate teaching and have contributed to the development of teaching and scientific - research in basic sciences, their inter and multidisciplinary fields. New research strategies are developed in order to increase the results achieved, generate new concepts, strengthen cooperation and transfer knowledge, as well as train young professions as a master's degree in Biomathematics (developed at the Agrarian University of Havana) and prepare competent specialists that respond to the teaching and scientific-investigative challenges of the new university.

**KEYWORDS:** statistical-mathematical modeling, agricultural processes

**MSC:** 62P12

## RESUMEN

La Modelación Estadístico-Matemática de Procesos, constituye una herramienta indispensable para el desarrollo eficiente de investigaciones científicas en la búsqueda de soluciones y producciones óptimas. El presente trabajo tiene como objetivo divulgar algunas experiencias y resultados alcanzados en la modelación de procesos en la Ciencias Agrarias. Se muestran brevemente el desarrollo de la Biomatemática, a partir de un trabajo multidisciplinario entre matemáticos, estadísticos y especialistas, se expone la evolución en regresiones no lineales y la propuesta de parámetros iniciales a partir de interpretaciones matemático-biológicas de los mismos, se incluyen ejemplos que van desde los modelos de crecimiento animal y vegetal (Modelos Logístico, Gompertz y Von-Bertalanffy, entre otros), crecimiento alométrico, curvas de lactancia y modelos utilizados en programas de mejoramiento genético (con el empleo del uso del pesaje en el día de control y las regresiones aleatorias). Las metodologías que forman parte de estas y otras investigaciones han sido introducidas y generalizadas en la docencia de pregrado y postgrado y han contribuido al desarrollo docente y científico – investigativo en las ciencias básicas, sus campos inter y multidisciplinarios. Se desarrollan nuevas estrategias de investigación con vistas a incrementar los resultados alcanzados, generar nuevos conceptos, fortalecer la cooperación y transferencia de conocimiento, así como la formación de jóvenes profesiones como master en Biomatemática (desarrollada en la Universidad Agraria de La Habana), y lograr especialistas competentes que den respuesta a los retos docentes y científico-investigativo de la Nueva Universidad Cubana.

**PALABRAS CLAVES:** modelación estadístico-matemática, procesos agrarios

## 1. INTRODUCCIÓN

Históricamente las Universidades, los centros productivos y de investigación en el sector agrario requieren y solicitan la colaboración de matemáticos, físicos, informáticos y expertos afines para el desarrollo eficiente de sus proyectos de Investigación, así como para el procesamiento y análisis de datos y la búsqueda de soluciones y producciones óptimas.

---

<sup>1</sup> lucia@unah.edu.cu , chuairey@yahoo.com

Los profesionales que asumen estos retos, requieren del desarrollo de nuevos modelos, algoritmos y de una constante actualización en procedimientos estadístico - matemáticos de avanzada, metodologías de trabajo y software especializados, cuyo uso favorecen el análisis y los resultados de las investigaciones y las actividades de innovación que se lleven a cabo.

En tal sentido el grupo de Biomatemática de la Universidad Agraria de la Habana (UNAH) desde 1994 hasta la actualidad ha desarrollado la línea de investigación "Modelación y Simulación de Proceso", la que ha estado asociada a modelos de crecimiento animal y vegetal, curvas de lactancia, estudios ecológico-estadísticos de plagas, sistemas pastoriles, estudio de sostenibilidad socioeconómica en el sector agrícola-pecuario, en la descripción de la dinámica de las propiedades físico-mecánicas de los frutos, en la estimación de parámetros genéticos y evaluaciones en programas de mejoramiento genético, entre otros fenómenos del mundo real. El objetivo del presente trabajo es divulgar algunas experiencias y resultados alcanzados en la modelación de procesos, con énfasis en las aplicaciones de las Ciencias Agrarias.

## 2. DESARROLLO

### 2.1. Modelos que describen la dinámica de crecimiento animal y vegetal.

Las investigaciones agrarias requieren entre otros aspectos la aplicación de modelos que describen procesos biológicos e ingenieriles (mediante herramientas matemáticas), estos estudios se presentan en la rama de la ciencia denominada Biomatemática, que además requiere de un trabajo multidisciplinario entre especialistas, que permita la interpretación del resultado mediante un vocabulario matemático-biológico.

Una de las temáticas de mayor interés y repercusión en las investigaciones agrarias está asociada a los modelos que describen la dinámica de crecimiento animal y vegetal, abordada por Fernández y col. (1996), quienes establecieron criterios y valoraciones en el análisis y aplicación de estos modelos sobre bases matemático - biológica y asociada al empleo del análisis de regresión para la estimación del modelo y del cálculo diferencial para la descripción del proceso.

El crecimiento animal o crecimiento ponderal (relación funcional entre el peso vivo con respecto a la edad) requiere de regresiones no lineales, así como del empleo de Métodos iterativos (Marquardt, Gauss-Newton y Paso descendente, entre otros), y muy en especial de la propuesta de parámetros iniciales para la convergencia. En un inicio estos modelos se trabajaron mediante la linealización del modelo, por lo que las hipótesis de bases quedaban en escala transformada y se introducían sesgos, los cuales eran corregidos posteriormente.

A partir de la inclusión de regresiones no lineales en software estadísticos, se comienza a trabajar directamente con modelos no lineales, pero el proceso requiere de la propuesta de parámetros iniciales. Las investigaciones realizadas en este sentido mostraron, que algunos de estos parámetros tienen una interpretación biológica.

Por ejemplo, los procesos de crecimiento (animales, plantas, etc.) responden a modelos de tipo Logístico, Gompertz y Von-Bertalanffy, entre otros (figura 1).

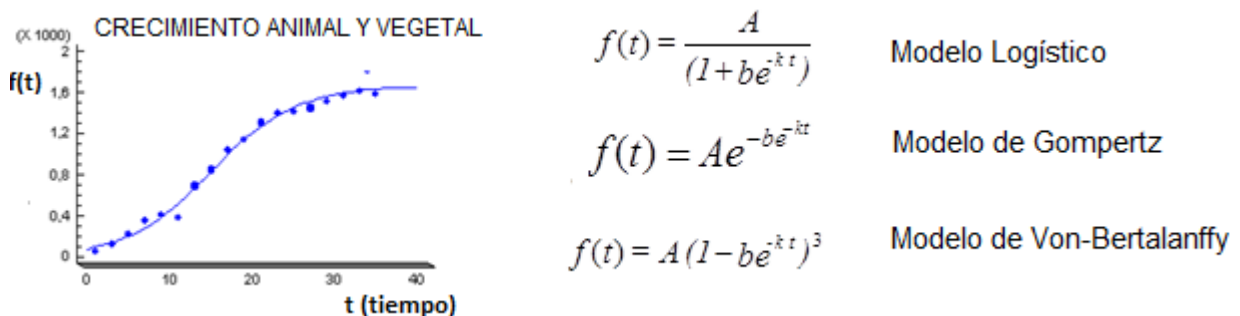


Figura. 1. Modelos asintóticos con puntos de inflexión que describen el crecimiento animal y vegetal donde :

$f(t)$ : variable aleatoria (respuesta), peso vivo, altura de la planta.

$t$ : variable controlada o predefinida (dependiente)

$A, b, k$ : parámetros a estimar

Estos modelos son de tipo sigmoides, asíntoticos y con punto de inflexión, donde es posible establecer una propuesta de valores iniciales a los parámetros a partir de relaciones como:

**Asíntota (A):** En todos estos modelos la asíntota se corresponde con el parámetro A, por lo que a partir de los datos observados es posible proponer el valor aproximado de este parámetro. En animales representa el peso a la madurez y el máximo crecimiento en plantas.

**Tasa de cambio (k):** Esta se refiere a los cambios relativos, relacionado con la primera derivada se asocia a las tasas de ganancias en peso instantáneas en animales y en plantas se asocia a las tasas de crecimiento promedio. Grandes valores de k indican madurez temprana y valores pequeños indican madurez tardía.

**Punto de inflexión:** Este punto ocurre cuando existe un cambio de signo en la primera derivada, es donde se alcanza la máxima tasa de ganancia en el crecimiento animal y la máxima velocidad de crecimiento en plantas. (figura 2).

Una vez estimado el modelo con el empleo de herramientas matemáticas y su validación estadística, resulta de gran importancia y utilidad en la práctica científico – investigativa, la interpretación de los indicadores relacionados con el modelo (asíntota, tasa de cambio y punto de inflexión) en el contexto zootécnico, agronómico y de otros procesos biológicos e ingenieriles.

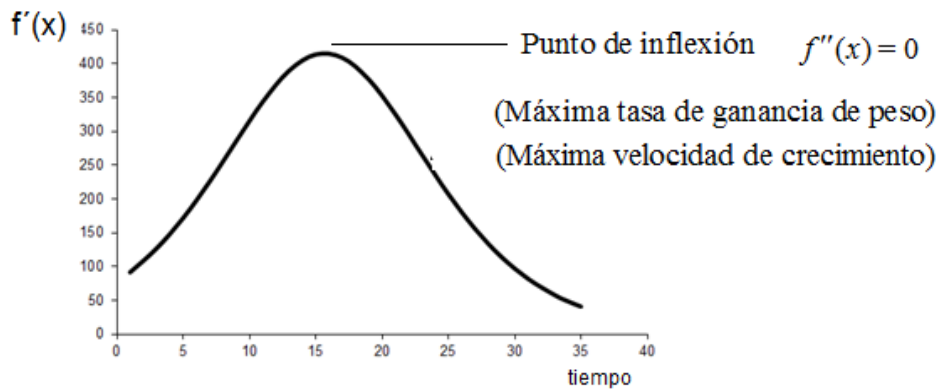


Figura 2. Comportamiento de la tasa de ganancia o velocidad de crecimiento (primera derivada) en el período analizado.

En la actualidad se cuenta con valiosos resultados relativo a la Modelación Estadístico – Matemática de procesos agrarios, vinculados no solo al estudio de crecimiento animal y vegetal, ya que han sido abordados otras problemáticas como el crecimiento alométrico (que describe la relación del crecimiento de una parte de un órgano o tejido con respecto a todo el organismo) que puede responder al modelo potencial

$$y = f(x) = bx^k$$

Y: peso de la parte, x: peso vivo, b y k parámetros a estimar

El parámetro k se considera como la constante de alometría, de vital importancia ya que permite hacer un análisis del crecimiento de los diferentes tejidos y órganos (vísceras, huesos, músculos, tejido adiposo, etc.) a partir del peso total, esto permite determinar el momento óptimo del sacrificio considerando criterios técnico - económicos.

Similares interpretaciones se han realizado en otros estudios como son los procesos productivos de vacas lecheras, que incluyen las denominadas curvas de lactancias (producción diaria de leche con respecto al tiempo), cuya forma ocurre tradicionalmente con un crecimiento en el período inicial, y una parte descendente posterior al pico de producción. Su comportamiento ha sido estudiado mediante el uso de modelos de regresión, dentro de las expresiones más utilizadas en este tipo de estudio está el modelo de Wood, dado por Wood (1967):

$$f(x) = a x^b e^{(-kx)}$$

$Y = f(x)$ : producción diaria de leche, x: día de lactancia, b y k parámetros a estimar.

Un modelo flexible, para la representación de la curva de lactancia, es el de regresión múltiple, propuesto por Ali y Schaeffer (1987). Se expresa como:

$$Y(t) = a + b \cdot \frac{t}{305} + c \cdot \left( \frac{t}{305} \right)^2 + d \cdot \ln \frac{305}{t} + e \left( \ln \frac{305}{t} \right)^2$$

Donde a, b, c, d y e son parámetros a estimar, a se asociado al pico de lactación, (b y c) a la fase decreciente y los restantes (d y e) lo están a la fase ascendente.

Los estudios asociados a curvas de lactancia poseen interés teórico y práctico ya que posibilitan la realización de predicciones del proceso productivo y estudiar las respuestas en diversas condiciones de alimentación, manejo y ambiente. Autores como Ali y Schaeffer (1987), Fernández y col. (2005, 2011), destacan además la capacidad descriptiva de estos modelos y sus posibilidades para obtener indicadores de interés económico como son: picos de producción (valores extremos en la lactancia y el momento en que se alcanzan), tasa de cambio o velocidad instantánea, las que permiten mostrar la dinámica del proceso.

De forma similar se puede hacer referencia a la modelación de la curva de puesta de huevos, donde el análisis del comportamiento de estas curvas, unido al empleo de las series temporales, permite determinar sistemas de alerta en los procesos de Vigilancia Sindrómica de gallinas ponedoras (Del Pozo, 2016). Otras investigaciones se asocian a procesos ingenieriles para determinar la calidad de frutos post cosecha, a partir de modelos que describen la dinámica de las propiedades físico-mecánicas de los frutos, igualmente se utilizan modelos en estudios de sostenibilidad socioeconómica entre otros procesos, como muestran los trabajos de Vázquez y col (2012 y 2014), Jiménez y col. (2012), Díaz y col. (2014) Cervantes y col (2015), Ramos y col. (2016), entre otros.

## 2.2. Modelos utilizados en el proceso de mejoramiento genético.

Otras investigaciones que requieren de la Modelación Estadístico-Matemática en este sector, está relacionada con la evaluación de vacas y sementales, donde los programas de selección y mejoramiento genético en prácticamente todas las especies ganaderas, se basan en el uso del Modelo Animal asociado a un procedimiento tipo BLUP (*Best Linear Unbiased Predictor*), de forma general este modelo es reportado por Fernández (2004), como:

$$Y_{ij} = \mu + F_a + G + e_{ij}$$

$Y_{ij}$  – producción de leche,  $\mu$  – efecto medio general,  $F_a$  – factores ambientales,  $G$  – factores genéticos,  $e$  – efecto de error aleatorio  $N(0, \sigma^2)$ .

Los que permiten obtener estimadores insesgado y de mínima varianza, en un inicio se trabajó con el dato resumen de producción de leche, actualmente se emplean modelos similares denominados internacionalmente como *Test Day Model* (TDM), es decir modelos a partir del pesaje en el día de control y medidas repetidas, lo que permite elevar la estimación y exactitud de los valores genéticos, los que han sido reportados por Ptak y Schaeffer (1993), Fernández y col. (2005), entre otros autores.

Igualmente se han desarrollado modelos que consideran la curva de lactancia para cada individuo y cada control lechero como una observación separada y particular de cada animal, a estos se le denominan modelo de regresiones aleatorias. Fernández y col. (2005) recorren un amplio espectro en cuanto a la evolución y uso de estos modelos, con énfasis en los estudios de las curvas de lactancia y los programas de selección y mejora animal del ganado vacuno.

Cabe mencionar el empleo de los modelos de regresiones aleatorias mediante la utilización de polinomios ortogonales de Legendre, ya que constituyen una vía eficiente para la estimación de parámetros y variaciones genéticas, además permiten analizar correlaciones genéticas entre las producciones de leche en el día de control por clases (figura. 3), que muestran que estas se hacen más débiles a medida que aumenta los días de producción, lo que permite identificar que es posible realizar la selección animal preferiblemente en la primera etapa de la producción de leche. Fernández y col. (2011) corroboran la eficiencia de estos modelos en estudios realizados con animales de la raza Holstein en Cuba.

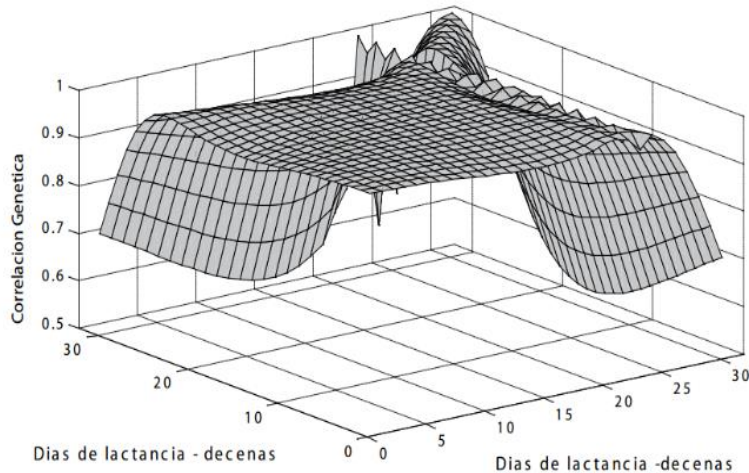


Figura 3. Correlaciones genéticas entre las producciones de leche en el día de control por clases.

Estos y otros procesos investigados, han posibilitado el desarrollo de nuevos conocimientos asociados a la modelación y simulación de procesos y el logro de nuevas metodologías estadístico-matemáticas y recursos informáticos, que han dado respuestas a problemas vigentes de investigación en el sector agrario y otros afines. En el procesamiento y análisis de los procesos agrarios analizados se ha tenido en consideración diferentes software estadísticos, siendo los más representativos: SAS, SPSS y Statgraphics.

Los modelos y procedimientos asociados a las diferentes temáticas han sido introducidos indistintamente en programas de maestrías y doctorados que se desarrollan en la Universidad Agraria de La Habana (Medicina Veterinaria Preventiva, Agroecología, Producción Animal, Biomatemática, Ciencias de la Educación, Ingeniería Agrícola, entre otros), también se generalizan en países como Angola, Argentina, Bolivia, Brasil, Colombia, Ecuador, España, México y Venezuela. La contribución de la Estadística Aplicada a las Ciencias Agrarias con un enfoque didáctico y de transferencia de conocimientos, se visualizan en el trabajo de Fernández y col. (2013). En la actualidad existe una alta y creciente demanda del empleo de herramientas estadístico-matemáticas por lo que se desarrollan nuevas estrategias de investigación con vistas a incrementar los resultados alcanzados, generar nuevos conceptos, fortalecer la cooperación y transferencia de conocimientos, así como la formación de jóvenes profesionales como master en Biomatemática (Maestría de la Universidad Agraria de La Habana), y lograr especialistas competentes que den respuesta a los retos docentes y científico-investigativo de la Nueva Universidad Cubana.

### 3. CONCLUSIONES

El desarrollo de la Modelación Estadístico-Matemática en procesos agrarios y afines, eleva la calidad de las investigaciones científicas y la introducción de los resultados en la práctica socio-productiva y la enseñanza de pre y postgrado, lo cual permite saltos cualitativos y crear una base de recursos humanos y materiales para hacer frente a los retos y perspectivas del país.

**RECEIVED: MARCH, 2017**  
**REVISED: OCTOBER 2017**

### REFERENCIAS

- [1]. CERVANTES R PONCE DE LEÓN D BALMASEDA, C CABRERA y J.R, FERNÁNDEZ, L. (2015.): Efecto de la pulpa de *Coffea arabica* L., sobre suelos del macizo montañoso Guamuhaya. **Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias**, 24, 38-43.
- [2]. DEL POZO, J. (2016.): **Vigilancia Sindrómica en gallinas ponedoras de dos unidades comerciales de la provincia de Artemisa**. Trabajo de Diploma, Facultad de Medicina Veterinaria, Universidad Agraria de la Habana, Cuba.
- [3]. DÍAZ, A TORRES, V. y FERNÁNDEZ LUCÍA SARDUY, L. (2014): Modelación del crecimiento de bovinos en pastoreo con gramíneas y leguminosas. **Revista de Zootecnia Tropical**, 32, 341-354.

- [4].FERNÁNDEZ, L. (. 1996): **Modelos que describen la dinámica de procesos Biológicos en las ciencias Agropecuarias**. Tesis presentada en opción al título de Maestro en Ciencias en matemática Aplicada. Universidad Agraria de la Habana.
- [5].FERNÁNDEZ, L. (2005): **Modelos Estadísticos - Matemáticos en el análisis de curvas de lactancia y factores que la afectan en el genotipo Siboney de Cuba**. Tesis presentada en opción al grado de doctor en Ciencias Veterinarias. Instituto de Ciencia Animal..
- [6].FERNÁNDEZ, L TONHATI, H ALBUQUERQUE, L.G, ASPILCUETA-BORQUIS, R. R. y MENÉNDEZ BUXADERA, A. (2011): Empleo de Regresiones Aleatorias para estimación de parámetros genéticos y estudios de curvas de lactancia en animales de la raza Holstein en Cuba. **Revista Cubana de Ciencia Agrícola**, 45.
- [7].FERNÁNDEZ, L LARA A. M PEREYRA, A.M GUERRA, C. W, DE CALZADILLA, J. (2013): Estadística Aplicada a la Ingeniería Agrícola y a las Ciencias Agropecuarias. Su contribución en la docencia, investigación y transferencia de conocimiento. **Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias**. 22.
- [8].JIMÉNEZ, Y. R FERNÁNDEZ L. y CAPÓ J. R. (2012): Modelos Matemáticos para el pronóstico de indicadores cuantitativos que miden la calidad de la Educación Superior en la carrera de Agronomía de la Universidad Agraria de la Habana. **Revista Investigación Operacional**, 32, 173-179.
- [9].PTAK, E. y SCHAEFFER, L.R. (1993): Use of test day yeals for genetic evaluation of dairy sires and cows. **Livestock Production Science**, 34, 23-34.
- [10]. RAMOS, D, TERRY, E, SOTO F, CABRERA, A y FERNÁNDEZ, L. (2016): Respuesta del cultivo del plátano a diferentes proporciones de suelo y bocashi, complementadas con fertilizante mineral en etapa de vivero. *Revista de Cultivos Tropicales*, 37, 165-174..
- [11]. VÁZQUEZ, Y GUERRA, C.W y SÁNCHEZ, O. E. (2012): Diferentes Métodos Estadísticos para el análisis de variables discretas. Una aplicación en las ciencias agrícolas y técnicas. **Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias**. 21.
- [12]. VÁZQUEZ, Y GUERRA, C.W SÁNCHEZ, O.E. (2014): Modelación estadístico-computacional para el estudio de la sostenibilidad socioeconómica de la empresa pecuaria valle del Perú. **Revista Investigación Operacional**, 35, 121-129..
- [13]. WOOD, P. (1967): Algebraic model of lactation curve in cattle. **Nature**, .164-165..