

MANIPULACIÓN DE A-SPLINES CÚBICOS BASADA EN RESTRICCIONES

Ana I. Toledo Marrero*, Sofía Behar Jequín*, Wilfredo Morales Lezca*, Jorge Estrada Sarlabous**

*Universidad de La Habana, Cuba.

**Instituto de Cibernética Matemática y Física, Cuba

ABSTRACT

In geometric modeling or graphic design applications the interactive manipulation of geometric properties, such as position, tangency and curvature is crucial. Qupting [12], the conventional methods do not provide direct control at arbitrary points on the curve. Users may have some control at a few specific points and this control strongly depends on the representation of the curve. For instance, Bezier curves offer direct representational control of position and tangency at the endpoints of its sections, but not at its interior points. Users control properties on the interior of the curves indirectly by manipulating the control vertices or by complicating the curves through subdivisions. In this work, we introduce methods to provide a more direct and intuitive control of a cubic A-spline curve: the first method permits to assign a tangent direction to a prescribed interior point, while the second assigns a prescribed line as the tangent line at some interior point. These are basic tasks in the constraint-based curve manipulation and in the present work we demonstrate that they may be efficiently solved using cubic A-spline curves.

KEY WORDS: A-spline curve, constrain based curve manipulation, free design, geometric modeling, graphic design, CAGD.

MSC: 65D07, 41A29, 65D17, 68U07

RESUMEN

En modelación geométrica o en aplicaciones de diseño gráfico, la manipulación interactiva de propiedades geométricas, tales como la posición, la tangencia o la curvatura es crucial. Citando a [12], los métodos convencionales no proveen un control directo de estas propiedades en un punto arbitrario sobre la curva. Los usuarios pueden tener algún control sobre unos pocos puntos y este control depende fuertemente de la representación de la curva. Por ejemplo, las curvas de Bezier ofrecen un control directo sobre la posición y los vectores tangentes en los extremos de cada sección de la curva, pero no sobre sus puntos interiores. Los usuarios controlan las propiedades sobre los puntos interiores indirectamente, bien manipulando los vértices del polígono de control o complicando la curva haciendo subdivisiones. En este trabajo se introducen dos métodos que aportan un control más directo e intuitivo de una curva A-spline cúbica. El primero de ellos permite la asignación de una dirección tangente a un punto interior prescrito en tanto, el segundo asigna una recta prescrita como la recta tangente a algún punto interior. Estas son tareas básicas en la manipulación de una curva basada en restricciones y se demuestra que las mismas pueden ser resueltas eficientemente usando curvas A-spline cúbicas.

1. INTRODUCCIÓN

La vorágine tecnológica en que está inmersa la humanidad, ha brindado nuevos horizontes a los escenarios de Diseño Geométrico Asistido por Computadoras (CAGD).

Hasta hace solo unos años, la variante más popular de interacción hombre máquina conocida, era el llamado paradigma WIMP (window, icon, menú, pointer), consistente en seleccionar operaciones de un menú o una paleta, introducir parámetros en ventanas de diálogo, etc. Sin embargo, con el acelerado desarrollo tecnológico ha surgido lo que parece ser el sucesor de este paradigma: las interfaces naturales. La interacción con los dispositivos que funcionan con interfaz natural se realiza mediante un conjunto de gestos que mimetizan la forma de indicar una acción con las manos en la práctica, lo que facilita la portabilidad y proporciona herramientas casi imposibles de implementar con WIMP.

Las interfaces naturales se están usando cada vez más frecuentemente en iPhones, monitores táctiles, tablets, iTables; dispositivos estos que han sido acogidos con gran entusiasmo por el mercado mundial. En particular, la plataforma *multitouch*, en la que el usuario interactúa con el sistema tocando pantallas sensibles, a través de gestos y/o usando objetos (por ejemplo, un lightpen), se ha puesto muy de moda. Básicamente los sistemas *multitouch* son algo más que un hardware que permite capturar gestos, toques, voces o movimientos, pues se requiere de un software que facilite una interacción natural e intuitiva y esto lo diferencia en muchos detalles del software que soporta a los WIMP.

Recientemente, el Instituto de Matemática Pura y Aplicada de Brasil, comenzó a desarrollar un proyecto que se aproxima a la modelación de curvas con un sistema de diseño geométrico asistido por computadoras pero, en este caso, la interacción se basa en esbozos de la curva, los cuales se indican deslizando los dedos sobre una mesa de dibujo sensible o iTable (ver figura 1).

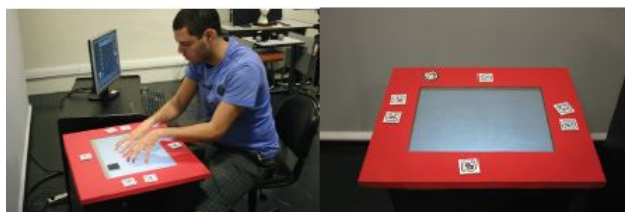


Figura 1: *Modelación mediante el uso de plataforma multitouch (iTable) [9]*

Esencialmente, el funcionamiento del software propuesto por este equipo de investigación se basa en el siguiente algoritmo: una vez que se obtiene el trazo de la curva, ésta se muestrea y luego tal muestra es ajustada por medio de curvas B-splines. El esbozo, ya modelado con un spline, puede ser deformado, transformado o editado. Estas acciones se desencadenan a partir de un conjunto de gestos intuitivos preestablecidos que son indicados por los dedos del diseñador y que pueden ser encontrados en [9](ver figura 2). Los algoritmos propuestos para modificar curvas B-spline están desarrollados en [12].

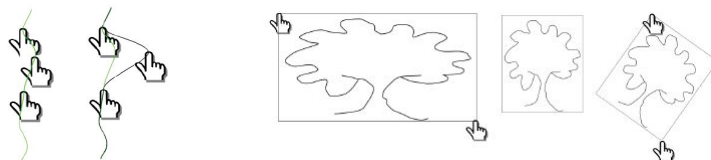


Figura 2: *Manipulación de la curva mediante gestos predeterminados [9]*

Cabría cuestionarse cuán útil podría resultar el empleo de curvas algebraicas implícitamente definidas o A-splines en la resolución de problemas de CAGD.

Hasta mediados de la década de los 80 la mayoría de los sistemas de CAGD existentes empleaban curvas y/o superficies parametrizadas racionalmente, como los B-splines. No es hasta 1985 que Sederberg [21] inicia el estudio de las curvas algebraicas, bautizados por el propio Sederberg como A-splines. Estos, no son más que curvas definidas por tramos donde cada sección es una curva algebraica definida implícitamente. Los A-splines resultaron ser una herramienta muy atractiva en modelación geométrica pues no se requería de cálculos vinculados con cambios de parametrización. A partir de entonces comenzaron a aparecer trabajos de Chandrajit Bajaj: [1], [2], [3], [4], así como de Richard Patterson y Marcos Paluzny: [17], [18], [19], [20], que utilizan tales curvas para el diseño gráfico, la interpolación y suavizamiento de datos, el ajuste de contornos, etc. Todos estos trabajos se basan en las múltiples ventajas que tiene la representación implícita en comparación con la paramétrica, algunas de estas son:

1. Toda curva racional paramétrica puede ser representada por una ecuación implícita, sin embargo el recíproco no es cierto, o sea, no toda curva definida implícitamente puede ser parametrizada racionalmente. Así, la clase de curvas definidas implícitamente es estrictamente mayor que la de curvas parametrizadas racionalmente.
2. Para un grado n fijo, las curvas algebraicas definidas implícitamente tienen mayor cantidad de parámetros libres que las racionales paramétricas del mismo grado, lo cual constituye una ventaja, pues en la práctica los parámetros libres adicionales, que se obtienen al emplear la representación implícita, se pueden utilizar para imponer condiciones extra de interpolación o restricciones geométricas, aproximar una curva complicada con un número menor de segmentos, lograr un mejor ajuste de los datos o garantizar un mayor orden de suavidad.
3. La clase de curvas definidas implícitamente es cerrada bajo ciertas operaciones muy usadas en los sistemas de diseño geométrico tales como: la unión, la intersección, la diferencia, el cálculo de offset ¹, etc. Por su parte la subclase de las curvas racionales paramétricas no lo es con respecto a ninguna de estas operaciones.
4. Usando la representación implícita es muy fácil determinar si un punto dado se encuentra o no sobre una curva o superficie y, en caso de no estar, determinar entonces a qué lado de la curva se encuentra. La solución de este problema usando representación paramétrica es mucho más costosa, requiriendo eventualmente de una fórmula de inversión.

Todas estas bondades de las curvas algebraicas implícitamente definidas y la relativa juventud de los A-splines en función del diseño geométrico computarizado, convierten a estas curvas en una herramienta intuitivamente más atractiva, natural y directa para estos fines. Con este trabajo, se propone la resolución de dos problemas que constituirían un paso de avance en el desarrollo teórico para el empleo de A-splines en CAGD, particularmente en escenarios con plataformas *multitouch*.

2. PRELIMINARES

En esta sección, con el fin de facilitar la comprensión de los procedimientos propuestos para la resolución de los problemas que se plantean posteriormente en este artículo, se introducen un conjunto de nociones, definiciones y resultados de trabajos anteriores que serán utilizadas en el desarrollo del presente proyecto.

Definición 1: Una curva **A-spline** de grado n es una curva continua, definida por tramos, donde cada sección es una curva algebraica de grado n . Los puntos donde se unen dos tramos consecutivos del A-spline se llaman nodos o puntos de ruptura.

¹La curva offset es el lugar geométrico de los puntos que se encuentran a una distancia euclidiana d , fija, de una curva dada.

Definición 2: Siendo S una curva spline plana, si para todo punto P sobre la curva se tiene que S , su recta tangente y la curvatura, son funciones continuas en P , se dice entonces que S es G^2 -continua.

En [6] se desarrollan las bases teóricas que garantizan la existencia de un esquema A-spline cúbico, a partir del cual, se aporta un conjunto de algoritmos que resuelven eficientemente disímiles problemas de CAGD. Esta familia de curvas algebraicas es capaz de interpolar una configuración prefijada de puntos, vectores tangentes y valores de curvatura asociados a cada uno de éstos, y lo hace sin la imposición de restricciones como las que se exigen en trabajos anteriores publicados por [5], [14], entre otros. La expresión de la curva en cada sección, en coordenadas baricéntricas ² respecto al triángulo de referencia asociado a ésta, queda implícitamente definida por la ecuación:

$$A_i : -v^3 + \frac{uw(u+w) + (\kappa_2^i w + \kappa_0^i u)v^2}{2} \delta_i^3 + \frac{(\kappa_2^i + \kappa_0^i)uvw}{2} \delta_i^4 = 0 \quad (2.1)$$

La cúbica descrita por la fórmula (2.1) resulta ser conexa, convexa y no singular en cada tramo. Adicionalmente, posee un parámetro libre δ , cuya manipulación permite interpolar un punto arbitrario en la región de interés y que por tanto funciona como asa geométrica.

La referida región de interés, varía en dependencia de los sentidos que posean los vectores tangentes a cada uno de los nodos en su correspondiente sección. De acuerdo a esta característica se analizan dos casos por separado: **caso interior**, donde la región de interés no es más que el triángulo cuyos vértices son los nodos asociados a la sección en cuestión y el punto donde se cortan las rectas tangentes a estos nodos; y el **caso exterior**, donde la región de interés es ahora el triángulo formado por los nodos y el punto de coordenadas baricéntricas $(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3})$. Los casos exterior e interior pueden ser visualizados en la figura 3, para un análisis más profundo sobre estas cuestiones puede consultarse [6], Sección 2.3.5.

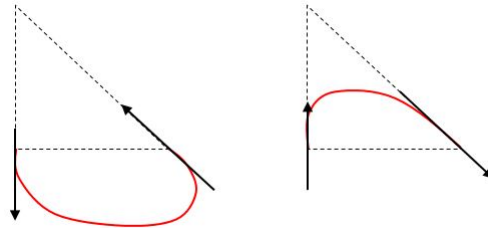


Figura 3: *Caso interior a la derecha, caso exterior a la izquierda*

Se entiende por **polígono de control** del esquema A-spline propuesto, a una línea poligonal formada por una serie de triángulos y trapecios consecutivos, cada uno de los cuales posee solamente un vértice en común con sus dos vecinos más cercanos, ver figura 4. La manera en que se escogen estos triángulos y trapecios depende de la configuración de nodos y vectores tangentes inicial, para más detalle sobre su construcción se puede estudiar la sección 2.3.1 de [6]. La modificación e interpolación a posteriori de alguno de los datos locales correspondientes a una sección, resulta factible sin que tales cambios se propaguen por todas las tramos del A-spline. A diferencia de cuando se usan splines cúbicos racionales G^2 -continuos, no es preciso esperar a calcular los datos de todas las secciones para obtener la

²Fijado un triángulo T de vértices A , B y C , todo punto P del plano puede ser escrito de forma única como combinación lineal baricéntrica de los vértices del triángulo, es decir, existen valores únicos de u , v y w tales que $P = uA + vB + wC$. A estos valores (u, v, w) se les denomina coordenadas baricéntricas del punto P respecto al triángulo T .

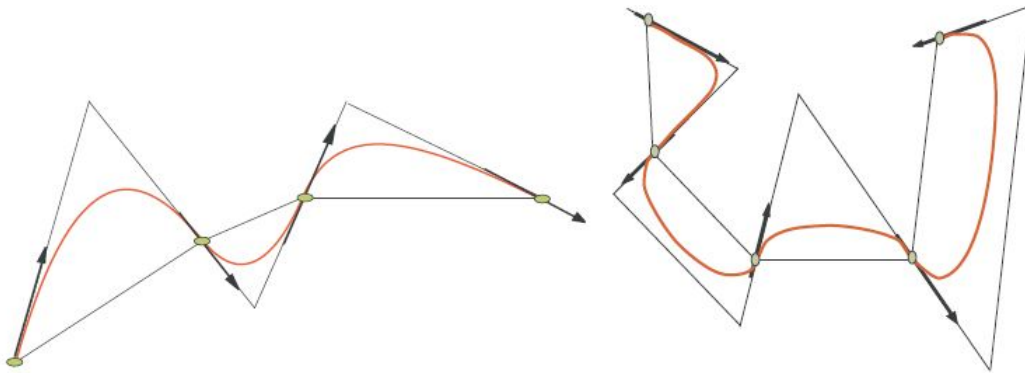


Figura 4: *Polígonos de control*

expresión general del mismo. Esto facilita que en la medida que se van actualizando los datos que definen la curva en cada tramo, éstos puedan graficarse secuencialmente en tiempo real. Todo lo anterior proporciona un control más directo e intuitivo de la geometría local de cada sección del A-spline y, en consecuencia, de la propia curva A-spline.

La implementación aún más eficiente de los algoritmos teóricos desarrollados en [6] es lograda en [15] al hacer la generación jerárquica de puntos sobre la curva spline. Ello permitió obtener una mejor aproximación del gráfico de la curva calculando un número muy reducido de puntos en comparación con el que era necesario en el proceso de subdivisión de puntos de tipo árbol cuaternario (quadtrees) sobre un triángulo basado en el principio blossom para la malla de un parche triangular de Bernstein-Bezier [11], [10] empleado en [13], [8] y [10] para lograr la visualización de la curva A-spline.

El algoritmo desarrollado en [15] logra más aún al generar, de forma eficiente, una sucesión de aproximaciones lineales a la curva spline, al gráfico de su ploteo de curvatura y a la curva d-offset del spline. Tal sucesión converge en el límite a cada uno de ellos, siendo susceptibles de incluir criterios de parada adaptativos que hacen aún más eficiente este proceso.

3. DESARROLLO

En aras de ganar un mayor control sobre el comportamiento de la curva en el interior de la región de interés, podrían ser impuestas otras restricciones al esquema A-spline. Los problemas que a continuación son propuestos, ya han sido abordados en la literatura para esquemas splines paramétricos, en [12] se puede encontrar un análisis detallado de cada uno de estas cuestiones para curvas B-splines.

3.1. Problema 1

El primer problema propuesto, podría ser enunciado formalmente de la siguiente manera:

Problema 1: Estudiar cómo variar los parámetros del A-spline cúbico de forma que se interpolen dos puntos consecutivos del polígono de control, sus vectores tangentes y el punto adicional P con un vector tangente t asignado

previamente.

Resolución del problema:

Para la resolución de este problema, se asumirá que se está trabajando en la sección i -ésima del A-spline, sin embargo, para la notación de los elementos asociados a este tramo serán suprimidos los supraíndices i , en el buen entendido de que son los correspondientes a dicha sección. A su vez, se comentará solamente la solución del problema para el caso interior, puesto que para el caso exterior todas las demostraciones y construcciones se realizan de manera análoga, cambiando solamente pequeños detalles en que naturalmente se diferencian un caso de otro.

Sea Ω la región de interés, denótese por P_0 y P_2 los nodos consecutivos del polígono de control en la sección i -ésima del A-spline, t_0 y t_2 los vectores tangentes asociados respectivamente y κ_0 y κ_2 los valores de curvatura correspondientes. Sea además P_1 el otro vértice del triángulo de referencia. P de coordenadas baricéntricas respecto al triángulo de referencia (u_0, v_0, w_0) , es el punto interior a interpolar y t el vector tangente requerido en éste.

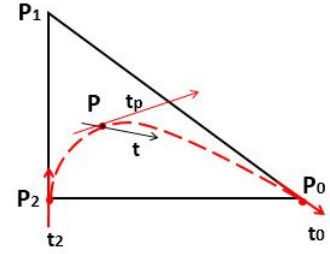


Figura 5: Problema 1

La curva A_i (representada en la figura 5 con color rojo) que interpola los nodos P_0 y P_2 , sus vectores tangentes y valores correspondientes de curvatura y además pasa por P con tangente t_p , queda implícitamente definida por medio de la siguiente ecuación:

$$A_i : -v^3 + \frac{uw(u+w) + (\kappa_2 w + \kappa_0 u)v^2}{2} \delta^3 + \frac{(\kappa_2 + \kappa_0)uvw}{2} \delta^4 = 0 \quad (3.1)$$

Con la interpolación del punto P ya han sido agotados los parámetros libres de la familia A-spline propuesta en [6]. Por esta razón, será necesario variar alguno de los parámetros que habían sido fijados previamente. Se comprueba que pequeñas variaciones de la curvatura en los nodos, no provoca grandes cambios en el comportamiento de la curva, además de que no influye en la geometría de otras secciones del A-spline, salvo las secciones vecinas, en las que la variación es mínima. La modificación del mencionado parámetro se logra perturbando convenientemente la curva, la forma en que se realiza la perturbación se describe a continuación.

Considérese el caso extremo de la curva de la familia A_i que interpola los nodos consecutivos P_0 con curvatura infinita y P_2 con curvatura nula y que además pasa por el punto P , denótese por K_{20} . Considérese análogamente, aquella que bajo las mismas restricciones tiene curvatura cero en P_0 y curvatura infinita en P_2 , denótesela como K_{00} . (ver figura 6)

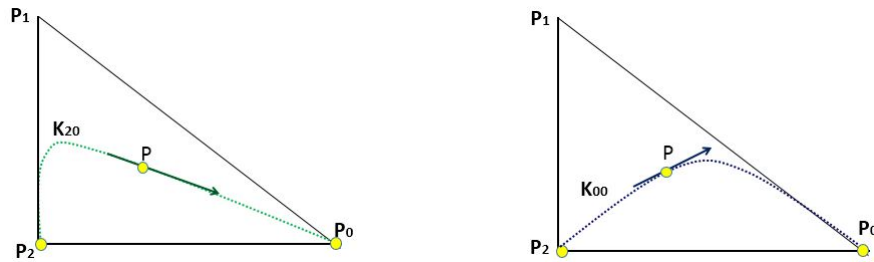


Figura 6: Curvas extremas consideradas para la perturbación

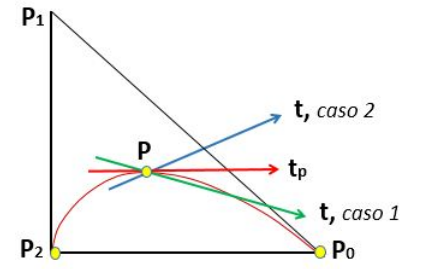
Imponiendo en (2) la interpolación del punto P con coordenadas baricéntricas (u_0, v_0, w_0) y pasando al límite para $\kappa_0 \rightarrow \infty$ (respectivamente $\kappa_2 \rightarrow \infty$) se obtienen las expresiones para las curvas límite K_{20} (respectivamente K_{00}):

$$K_{20} : \frac{uv^2v_0^3}{2w_0^3} + \frac{uvwv_0^4}{2w_0^4} = 0 \quad (3.2)$$

$$K_{00} : -\frac{wv^2v_0^3}{2u_0^3} + \frac{uvwv_0^4}{2u_0^4} = 0 \quad (3.3)$$

K_{20} y K_{00} tienen, asumiendo que no se renuncia a la convexidad, conexidad y no singularidad de la curva en el interior de la región de interés, valores mínimos y máximos para las pendientes de la curva en el punto P . Tales valores vienen dados por: $t_{min} = \frac{v_0}{u_0}$ y $t_{max} = \frac{v_0}{u_0-1}$. Esto quiere decir que una tangente con pendiente menor que la de la recta tangente a K_{20} en el punto P , o mayor que la de la recta tangente a K_{00} en el mismo punto, es inadmisibles.

Asumiendo ahora que el valor de la pendiente de t está en el intervalo admisible (t_{min}, t_{max}) , se consideran dos casos (Figura 7). En el primer caso, la pendiente de la recta tangente determinada por el vector t es menor que la pendiente de la tangente t_p a la curva A_i en el punto P . En el segundo caso, el valor de la pendiente de la recta tangente determinada por el vector t que se desea alcanzar en P , es mayor que la pendiente de la tangente t_p a la curva A_i en este punto.



La perturbación propuesta en el caso 1, en el que se busca una disminución de la pendiente de la recta tangente a A_i en P , queda determinada por la expresión:

$$A_{ip} : A_i + \alpha K_{20} = 0 \quad \alpha > 0 \quad (3.4)$$

Figura 7: Caso 1 (en color verde) y caso 2 (en azul)

Análogamente para el caso 2 la perturbación toma la forma:

$$A_{ip} : A_i + \beta K_{00} = 0 \quad \beta > 0 \quad (3.5)$$

Utilizando el teorema de los valores intermedios, se prueba la existencia de valores únicos de α y β positivos que garantizan que se alcance la pendiente t deseada en el punto P , al considerar la curva perturbada A_{ip} en el caso correspondiente. Además, invocando al principio de variación disminuida, se demuestra que para los valores considerados de α y β , A_{ip} es conexa, convexa y no singular en el interior de la región de interés. Esta por tanto, constituye la solución al problema 1.

Es importante señalar que si el vector tangente t queda fuera del intervalo admisible, una alternativa de solución al problema puede ser incorporar al punto P y su tangente t a la configuración inicial de nodos, vectores tangentes y valores de curvatura, teniendo en cuenta en dicho caso que será necesario asignar un valor para la curvatura en este nodo. La sección A_i es ahora reemplazada por dos nuevas secciones consecutivas donde el vértice común sería P .

Esta misma alternativa de solución puede ser adoptada en caso de que la variación de los valores prefijados para la curvatura en los nodos P_0 y P_2 , ya sea por exigencias técnicas del diseño o simplemente por preferencias del diseñador, no sea factible. Este caso queda relegado a un segundo plano, puesto que en los escenarios de diseño que se describen en la introducción, en los que se utiliza plataforma *multitouch*, lo más natural es que la exactitud no sea una exigencia, sino más bien la búsqueda de belleza y suavidad al trazar la curva.

3.2. Problema 2

Con las mismas hipótesis que en el problema anterior, se propone ahora la imposición de una nueva restricción.

Problema 2: Al seleccionar una recta R que corta la región de interés, estudiar cómo deben variar los parámetros del A-spline cúbico de forma que, se interpolen los nodos asociados a dicha región, sus vectores tangentes y además, la sección de la curva resultante de esta interpolación contacte a R en un único punto de dicha región.

Nótese que en este nuevo problema no se exige la interpolación de un punto específico de la región de interés. Esta vez, se trata de alcanzar a la recta R en algún punto, en el cual la tangente a la curva sea precisamente un vector en la dirección de R . (ver figura 8).

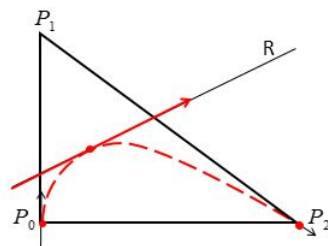


Figura 8: Problema 2

En el caso interior, aún cuando es posible interpolar adicionalmente cualquier punto en toda la región, la recta R debe cortar, en particular, a los dos segmentos de rectas cuyos extremos son (en coordenadas baricéntricas): $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ respectivamente; pues de lo contrario no existe la cúbica convexa, conexa y no singular que interpole a P_0 y P_2 con los vectores tangentes y valores de curvatura prescritos.

En el caso exterior, por las mismas razones, la recta R debe cortar a la región de interés en la parte de ella en que es posible interpolar un punto adicional. R , por tanto, debe cortar los segmentos de rectas cuyos extremos son $(0, 0, 1)$, $(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3})$ y $(1, 0, 0)$, $(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3})$. En la figura 9 se pueden ver algunos ejemplos de rectas admisibles y no admisibles.

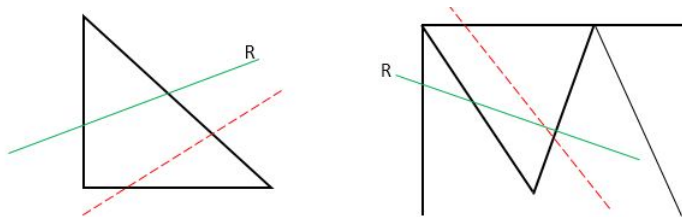


Figura 9: Ejemplos de rectas admisibles (verdes) y no admisibles (rojo), caso interior a la izquierda y exterior a la derecha

La resolución de este problema podría reducirse a la resolución del anterior si se fija un punto de la recta R en el intervalo adecuado de esta. En efecto, fijado un punto perteneciente a la recta, y en el interior de la región de interés, se tendrían las hipótesis del problema anterior, asumiendo como vector tangente en P al determinado por la propia recta R .

Teniendo en cuenta este hecho, para la resolución de este último problema solo sería preciso fijar un punto de R que pertenezca siempre a la región de interés, preferiblemente el mismo, tanto para el caso interior como para el caso exterior. La solución propuesta es tomar como punto P a aquel donde se cortan la recta prefijada R y la mediana del triángulo de vértices P_0 , P_2 y P_1 , que no es más que el triángulo de referencia. Está demostrado en trabajos anteriores que este punto está dentro del intervalo incondicionalmente interpolable tanto en el caso interior como en el exterior.

De esta manera queda totalmente resuelto el segundo problema propuesto, que en cierto sentido puede ser considerado como dual del problema 1.

4. CONCLUSIONES

Este trabajo constituye un paso de avance en el desarrollo teórico necesario para el uso de A-splines en escenarios de CAGD. Con el presente, quedan resueltas dos importantes cuestiones:

- En primer lugar, se logra un mayor control geométrico en el interior de la curva, interpolando un punto arbitrario en la región de interés con una tangente prefijada, esto se traduce en un mayor dominio sobre el comportamiento de la curva no solo en los nodos del A-spline, sino también en el interior de cada una de las secciones del mismo.
- En segundo lugar, con la resolución del problema 2, se garantiza que la curva A-spline en una determinada sección contacte una y solo una vez a una recta prefijada, con lo cual se logra que en el punto de contacto, la tangente a la cúbica que describe el comportamiento del A-spline en la sección, sea justamente un vector en la dirección de la recta dada.

La solución obtenida para el segundo problema, permite dar una respuesta más elegante a las cuestiones atacadas en la sección 4.5 de [7], pues si la intersección de la región de interés Ω_i con la curva frontera es un segmento de recta que satisface las hipótesis del problema 2, puede entonces asignarse a la i -ésima sección del A-spline los valores de curvatura y de δ_i calculados en la solución del problema 2 y, puesto que cada sección del A-spline es una curva convexa, dicha sección estará del mismo lado que los datos respecto al polígono B. Lo anterior evidencia que la solución propuesta para este problema constituye, entre otras ventajas, una útil alternativa al problema de trayectorias con restricciones (ver figura 10).

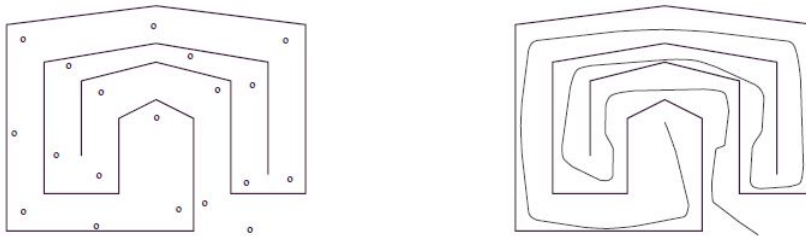


Figura 10: *Ejemplo de diseño de trayectorias con restricciones*

En comparación con las soluciones propuestas por B. Fowler y R. Bartels en [12] para el caso de curvas B-spline, la variante de resolución utilizada en este artículo para la familia A-spline construida en [6], es más sencilla y adicionalmente, posee la ventaja de que uno de los problemas es reducible al otro, por tanto en este sentido, el procedimiento se simplifica.

5. RECOMENDACIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Se recomienda la implementación eficiente de los métodos de resolución de los problemas 1 y 2 e integrar estos códigos con las implementaciones propuestas en [16], de esta manera se podrá obtener un software que funcione como útil herramienta para realizar diseño, ya sea utilizando plataforma *multitouch* o el paradigma WIMP.

Sería interesante, a su vez, estudiar cómo varía la curvatura a lo largo de la curva A-spline que resulta de la interpolación de una configuración inicial de puntos, vectores tangentes y valores de curvatura asociados y encontrar condiciones sobre el parámetro δ de modo que no se tengan ni muchas ni grandes oscilaciones al visualizar un plot de la curvatura. Este nuevo problema podría quedar enunciado formalmente de la siguiente manera:

Problema Propuesto : Una vez que ha sido interpolada una configuración inicial de puntos, vectores tangentes y valores de curvatura asociados, estudiar qué valor del parámetro libre δ permite minimizar la variación de curvatura dentro de una sección del A-spline, de manera que no se observen ni muchas ni grandes oscilaciones de este parámetro.

Este problema está muy relacionado con el concepto de *fairness*. En la literatura se entiende por *fair*, una curva cuyo plot de curvatura es continuo y posee muy pocas oscilaciones, esto es, que apenas tenga valores de curvatura extremos y situados además donde los desea el diseñador y en ningún otro lugar [11]. Una curva *fair* es estéticamente lo que más desea un diseñador y por lo general, de todas las posibles curvas que pueden utilizarse para ajustar un conjunto de datos, suele ser una curva *fair* la que mejor lo hace.

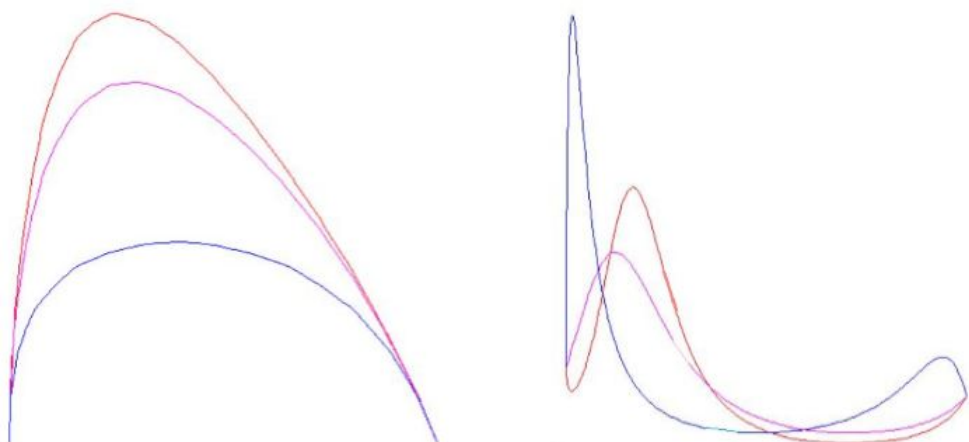


Figura 11: A la izquierda tres cúbicas con iguales condiciones iniciales de interpolación y diferente valor de δ y a la derecha sus correspondientes ploteos de curvatura

Las gráficas de la figura 11 muestran cuán importante resulta el estudio del parámetro δ . En la parte izquierda de la figura se observan tres curvas que corresponden a iguales condiciones iniciales de interpolación, es decir, interpolan los mismos nodos, con iguales vectores tangentes y valores de curvatura asignados; el único parámetro que ha variado es δ , si se analizan los correspondientes ploteos de curvatura asociados a cada una de estas en la parte derecha de la figura, es apreciable que su variación ha influido considerablemente en el comportamiento de la curvatura en el interior de la sección correspondiente del A-spline.

RECEIVED JULY 2014
REVISED FEBRUARY 2015

REFERENCIAS

- [1] BAJAJ, C. L. [1992]: The emergence of algebraic curves and surfaces in geometric design Technical report, Purdue University.
- [2] BAJAJ, C. L. and XU, G. [1996]: Data fitting with cubic A-splines In **Proceedings of Computer Graphics International, CGI'94, Melbourne, Australia**,, pages 329–340. World Scientific Publishing.
- [3] BAJAJ, C. L. and XU, G. [1999a]: A-splines: Local interpolation and approximation using g^k -continuous piecewise real algebraic curves **Computer Aided Geometric Design**, 16:557–578.
- [4] BAJAJ, C. L. and XU, G. [1999b]: Error bounded regular algebraic spline curves In **Proceedings of the Fifteenth Annual Symposium on Computational Geometry, Florida, USA**, volume 3773, pages 333–340. ACM New York, NY, USA.
- [5] BAJAJ, C. L. and XU, G. [2001]: Regular algebraic curve sections (iii)-applications in interactive design and data fitting **Computer Aided Geometric Design**, 18:149–173.
- [6] BEHAR, S. [2009]: Construcción de una familia de A-splines cúbicos G^2 -continuos para la solución de diversos problemas de CAGD. Tesis presentada en opción del grado de doctor en ciencias matemáticas, Universidad de La Habana.
- [7] BEHAR, S., ESTRADA, J., and HERNÁNDEZ, V. [2008]: Constrained interpolation with implicit plane cubic a-splines In Ruiz-Shulcloper, J. and Kropatsch, W. G., editors, **Proceedings of the 13th Iberoamerican Congress on Pattern Recognition: Progress in Pattern Recognition, Image Analysis and Applications**, volume 5197 of **Lecture Notes in Computer Science**, pages 724–732, Berlin, Heidelberg. Springer.
- [8] BEHAR, S., ESTRADA, J., HERNÁNDEZ, V., and LEÓN, D. [2005]: Smoothing of polygonal chains for 2d shape representation using a g^2 -continuous a-spline In Lazo, M. and Sanfeliu, A., editors, **Progress in Pattern Recognition, Image Analysis and Application. 10th Iberoamerican Congress on Pattern Recognition**, volume 3773 of **Lecture Notes in Computer Science**, pages 42–50, Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag.
- [9] CRUZ, L. M. V. and VELHO, L. [2010]: A sketch on sketch-based interfaces and modeling In **Proceedings of the 2010 23RD SIBGRAPI - Conference on Graphics, Patterns and Images Tutorials**, SIBGRAPI-T '10, pages 22–33, Washington, DC, USA. IEEE Computer Society.
- [10] ESTRADA, J., MARTÍNEZ, D., LEÓN, D., and THEISEL, H. [2005]: Solving Geometric Problems using Subdivision Methods and Range Analysis, In Daehlen, M., Morken, K., and Shumaker, L., editors, **Mathematical Methods for Curves and Surfaces: Tromso 2004**, pages 101–114. Nashboro Press.
- [11] FARIN, G. [1997]: **Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design: a practical guide** Academic Press Inc.
- [12] FOWLER, B. and BARTELS, R. [1993]: Constraint-based curve manipulation **IEEE Comput. Graph. Appl.**, 13(5):43–49.
- [13] HERNÁNDEZ-MEDEROS, V., MARTÍNEZ, D., and ESTRADA-SARLABOUS, J. [2002]: Fitting a conic a-spline to contour image data **Revista Investigación Operacional**, 29:55–64.
- [14] MEEK, D. S., ONG, B. H., and WALTON, D. J. [2003]: Constrained interpolation with rational cubics **Comput. Aided Geom. Des.**, 20(5):253–275.

- [15] MORALES LEZCA, W. [2012]: Generación jerárquica de puntos, curvas d-offset y ploteo de curvaturas asociados a un A-spline cúbico Tesis presentada en opción del grado de maestro en ciencias matemáticas, Universidad de La Habana.
- [16] MORENO ALEMÁN, J. [2012]: CAGD Environment: Una herramienta computacional para la visualización de curvas A-spline cúbicas y su aplicación a la solución de problemas del CAGD Tesis de licenciatura, Universidad de La Habana.
- [17] PALUSZNY, M. and PATTERSON, R. [1993]: A family of tangent continuous cubic algebraic splines **ACM Trans. Graph.**, 12(3):209–232.
- [18] PALUSZNY, M. and PATTERSON, R. [1994]: G^2 -continuous cubic algebraic splines and their efficient display In Laurent, P. J., Le Méhauté, A., and Schumacker, L. L., editors, **Proceedings of the international conference on Curves and surfaces in geometric design**, pages 353–359. A. K. Peters, Wellesley, MA, USA.
- [19] PALUSZNY, M. and PATTERSON, R. [1998]: Geometric control of g^2 -cubic a-splines **Computer Aided Geometric Design**, 15(3):261 – 287.
- [20] PALUSZNY, M., TROVAR, F., and PATTERSON, R. [1999]: G^2 composite cubic Bézier curves **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 102(1):49 – 71 Computational Methods in Computer Graphics.
- [21] SEDERBERG, T. W. [1985]: Piecewise algebraic surface patches **Comput. Aided Geom. Des.**, 2(1-3):53–59.