

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DEL AIRE EN UNA DIMENSIÓN Y CÁLCULO PARA LA FORMACIÓN DE NUBES POR UN VIENTO

Hisao Fujita Yashima¹, Asma Ayachi and Mohamed Zine Aissaoui

Laboratoire de Mathématiques Appliquées et Modélisation, Université de Guelma, Algérie.

ABSTRACT

In this paper we present an example of numerical computation of the motion of the air which goes over a mountain and, according to humidity, causes different quantities of condensation and different variations of temperature. The result of computation coincides satisfactorily with the theoretical values and those of observation.

KEYWORDS: viscous heat-conductive gas, stationary flow, formation of clouds.

MSC: 76N15, 86A10, 65L12.

RESUMEN

En este trabajo presentamos un ejemplo de cálculo numérico del movimiento del aire que pasa sobre una montaña y que, según la humedad, provoca diferentes cantidades de condensación y diferentes variaciones de la temperatura. El resultado del cálculo coincide de manera satisfactoria con los valores teóricos y con los de la observación.

1. INTRODUCCIÓN

El fenómeno de la formación de nubes por el viento que pasa sobre una montaña se observa comúnmente y se explica por los principios de la termodinámica: con la subida del aire la presión disminuye y por eso disminuye también la temperatura, lo que ocasiona la condensación del vapor de agua y el calentamiento relativo del aire por el calor latente. Para describir este fenómeno de manera científicamente coherente, se necesita también la descripción del movimiento del aire según los principios de la mecánica de fluidos, lo que hace bastante complicado el problema (para la problemática general, véanse por ejemplo, Matveev (1981) [14], Cotton *et al* (2011) [6]). Como modelo específico, por ejemplo en Clark *et al* (1991) [5] se propuso un modelo bastante exacto del fenómeno y, basándose en este modelo, se analizaron no pocos ejemplos concretos con simulación numérica (por ejemplo Wobrock *et al* (2003) [17], Planche *et al* (2013) [15] entre otros). Existen también programas de cálculo muy potente como el modelo WRF (Weather Research and Forecasting model, véase Skamarock *et al* (2008) [16]), que nos permite hacer simulaciones bastante detalladas a mesoescala con diferentes tipos de relieve de la tierra. Pero en todo caso la complejidad del fenómeno físico obliga una "parametrización", o sea algunas simplificaciones de magnitudes físicas de procesos microfísicos, para poder calcular la solución de las ecuaciones del modelo.

Desde el punto de vista matemático, las ecuaciones que modelan el movimiento estacionario de un gas viscoso (sin condensación del vapor) son esencialmente del tipo elíptico y, generalmente, se demuestra la existencia de una solución solamente con datos pequeños con respecto a los coeficientes de viscosidad y de conductividad térmica (véanse por ejemplo Farwik (1989) [8], Benabidallah *et al* (2007) [3]). Pero, si se considera un modelo en una dimensión con datos regulares (pero no necesariamente pequeños), como sugiere la teoría de las perturbaciones singulares (véase Lions (1973) [12]), se puede esperar una solución en la vecindad de la solución de las ecuaciones sin viscosidad y sin conductividad térmica.

El objetivo del presente trabajo es deducir los aspectos esenciales del fenómeno directamente de las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos con el término que representa de manera directa la cantidad de condensación sin utilizar la parametrización usual. Naturalmente a causa de la complejidad del problema no es practicable resolver las ecuaciones con todas las generalidades; por eso proponemos el estudio del caso en que el dominio se reduce a él en una dimensión, lo que, desde el punto de vista matemático, ofrece la posibilidad de resolver las ecuaciones con coeficientes de viscosidad y de conductividad térmica bastante pequeños como en la realidad. En concreto, vamos a considerar un sistema de ecuaciones del movimiento de un gas (aire) en una dimensión con el término de fuerza externa que resulta de la fuerza gravitacional y del perfil de la superficie terrestre y con el término de la cantidad de condensación dado por la derivada de la parte positiva de la

¹ hisao.fujitayashima@unito.it

diferencia entre la densidad real del vapor y la densidad del vapor saturado, y, utilizando el método de diferencias finitas, construiremos la solución numérica del sistema de ecuaciones. Ya que la parte positiva de una función, generalmente, no es derivable en los puntos en que muda el signo, para poder resolver nuestras ecuaciones necesitamos introducir un esquema particular de cálculo. Además, para definir la cantidad de condensación es conveniente utilizar la aproximación sucesiva; pero a causa de la propiedad del calor latente, que provoca una oscilación de aproximaciones sucesivas usuales, necesitamos utilizar una aproximación sucesiva acumulativa, como veremos en lo que sigue.

Como resultado del cálculo se muestra entre otros una correspondencia muy clara entre la humedad del aire entrante y la atenuación del descenso de la temperatura, y esta correspondencia corresponde de manera satisfactoria a lo que se espera de los datos de observación y de las propiedades conocidas de la transformación adiabática y del calor latente. Además el uso del método de diferencias finitas en estas simulaciones ha resultado eficaz. Nos parece que la idea metodológica del presente trabajo se puede aplicar a no pocos casos interesantes. En efecto, por ejemplo en Ghomrani *et al* (2014) [9] se ha utilizado un método análogo para el problema de una corriente vertical ascendente del aire con la condensación del vapor y se ha obtenido un resultado interesante.

2. SISTEMA DE ECUACIONES

Consideremos una superficie terrestre, cuya altura se denota por $h(x)$ ($x \in [0, L]$), y un flujo estacionario del aire sobre esta superficie terrestre. Denotamos por w la velocidad del aire en la dirección de la superficie del terreno, es decir, si v_x y v_z son la componente en la dirección de x y la componente en la dirección vertical de la velocidad, tenemos

$$w = \frac{v_x + h'v_z}{\sqrt{1+h'^2}} \quad (h' = \frac{d}{dx}h(x)) \quad (2.1)$$

Adoptemos la aproximación que considera la sección del flujo del aire como constante, como si el aire corriera en un tubo de sección constante.

Partimos desde el sistema de ecuaciones bien conocidas que describe el movimiento de un gas (véanse Landau *et al* (1989) [11], Antontsev *et al* (1990) [1]) y lo reformulamos en el caso del movimiento estacionario en un tubo (eventualmente construido solamente en nuestra mente), de manera que tenemos ecuaciones a una dimensión espacial. Si admitimos la hipótesis del tubo con sección constante, podemos escribir la ecuación de continuidad en la forma

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\rho(x)w(x)}{\sqrt{1+(h'(x))^2}} \right) = 0 \quad (2.2)$$

donde $\rho(x)$ denota la densidad del aire. Por otra parte, denotando por T la temperatura, por η y ζ los coeficientes de viscosidad y por R la constante de los gases dividida por la masa molar del gas, e introduciendo el término de la fricción con el terreno $-aw$ y el gradiente básico de la presión $-\gamma$, la ecuación de la cantidad de movimiento se escribe en la forma

$$\frac{\rho w}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx} w = f_1 \frac{d^2 w}{dx^2} + f_2 w - \frac{R}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx} (\rho T) - \frac{h'}{\sqrt{1+h'^2}} \rho g - aw + \gamma, \quad (2.3)$$

con

$$f_1 = \frac{1}{1+h'^2} \left[\frac{\eta}{3} (3h'^2 + 4) + \zeta \right],$$

$$f_2 = \frac{1}{(1+h'^2)^3} h''^2 \left[-\frac{\eta}{3} (h'^2 + 4) + \zeta (2h'^2 - 1) \right] - h' \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) h''',$$

($h'' = \frac{d^2}{dx^2} h(x)$, $h''' = \frac{d^3}{dx^3} h(x)$); la expresión de los coeficientes f_1 y f_2 resulta por cálculos bastante largos pero elementales. De manera análoga la ecuación del balance de la energía se escribe en la forma

$$(2.4) \quad \frac{\rho c_p w}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{dT}{dx} = \kappa \frac{d^2 T}{dx^2} - R \rho T \frac{d}{dx} \left(\frac{w}{\sqrt{1+h'^2}} \right) + g_1 \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + g_2 w \frac{dw}{dx} + g_3 w^2,$$

donde

$$g_1 = \frac{1}{1+h'^2} \left[\eta \left(\frac{4}{3} + h'^2 \right) + \zeta \right],$$

$$g_2 = \frac{-2h'}{(1+h'^2)^2} h'' \left[\frac{\eta}{3} + \zeta \right],$$

$$g_3 = \frac{1}{(1+h'^2)^3} h''^2 \left[\eta \left(1 + \frac{4}{3} h'^2 \right) + \zeta h'^2 \right],$$

mientras que c_p y κ son el calor específico del gas y el coeficiente de conductividad térmica.

Cuando se produce la condensación del vapor, se debe añadirle a la ecuación (2.4) el término debido al calor latente de la condensación

$$L_{gl} H_{gl},$$

donde L_{gl} es el calor latente de la evaporación/condensación, mientras que H_{gl} denota la cantidad de la condensación (su valor negativo indica la de la evaporación). Para el aire que, partiendo desde un lugar indicado por $x = 0$, pasa sobre la montaña, podemos poner

$$H_{gl} = \frac{w}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx} [\text{máx}(0, \pi_0 \frac{\rho(x)}{\rho_0} - \bar{\pi}_{vs}(T(x)))] \quad (2.5)$$

donde ρ_0 es la densidad del aire al punto inicial $x = 0$ y π_0 la densidad del vapor en el punto inicial $x = 0$, mientras que $\bar{\pi}_{vs}(T)$ denota la densidad del vapor saturado en la temperatura T . Los valores de L_{gl} y $\bar{\pi}_{vs}(T)$ son aproximadamente

$$L_{gl} = L_{gl}(T) \approx (3244 - 2,72 T) \cdot 10^3 \quad (J/kg), \quad (2.6)$$

$$\bar{\pi}_{vs}(T) \approx \frac{\mu_h E_0}{R_0 T} \cdot 10^{\frac{7,63(T-273,15)}{T-31,25}}, \quad E_0 = 6,107 \quad (mbar) \quad (2.7)$$

$$\mu_h = 18,01 \quad (g/mol), \quad R_0 = 8,314 \quad (J/mol)$$

(véanse por ejemplo Matveev (1965, 1984, 2000) [13], Kikoïne *et al* (1979) [10]).

Por otra parte, de (2.2) se deduce que hay una constante K_ρ tal que

$$\frac{\rho w}{\sqrt{1+h'^2}} = K_\rho. \quad (2.8)$$

Dado que el caso $K_\rho = 0$ no nos interesa, sin restringir la generalidad podemos suponer que

$$K_\rho > 0.$$

Añadiendo $L_{gl}H_{gl}$ a (2.4) y substituyendo (2.5) y (2.8) en (2.3)-(2.4), tenemos el sistema

$$K_\rho \frac{dw}{dx} + \frac{RK_\rho}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{1+h'^2} \frac{T}{w} \right) = f_1 \frac{d^2w}{dx^2} + f_2 w - K_\rho \frac{h'}{w} g - \alpha w + \gamma, \quad (2.9)$$

$$c_v K_\rho \frac{dT}{dx} + RK_\rho \sqrt{1+h'^2} \frac{T}{w} \frac{d}{dx} \left(\frac{w}{\sqrt{1+h'^2}} \right) = \kappa \frac{d^2T}{dx^2} + g_1 \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + g_2 w \frac{dw}{dx} + g_3 w^2 + L_{gl} \frac{w}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx} [\text{máx}(0, \pi_0 \frac{K_\rho \sqrt{1+h'^2}}{\rho_0 w} - \bar{\pi}_{vs}(T(x)))] \quad (2.10)$$

Dado que son ecuaciones diferenciales de segundo orden, tenemos que considerar el sistema de ecuaciones (2.9)-(2.10) por ejemplo con las condiciones de frontera

$$w(0) = \bar{w}_0, \quad w(L) = \bar{w}_1, \quad T(0) = \bar{T}_0, \quad T(L) = \bar{T}_1. \quad (2.11)$$

No es fácil demostrar la existencia de una solución de este problema. Pero, cuando $\frac{\pi_0 K_\rho \sqrt{1+h'^2}}{\rho_0 w} \leq \bar{\pi}_{vs}(T)$

(anulando el último término de (2.10)) en todo el dominio, utilizando la idea de la perturbación singular (véase por ejemplo Lions (1973) [12]) podemos demostrar la existencia de una solución en una vecindad de la solución de las ecuaciones sin viscosidad y conductividad térmica (Ayachi *et al* (2014) [2]). Por eso, siguiendo esta idea, vamos a resolver numéricamente el sistema de ecuaciones (2.9)-(2.10) con las condiciones (2.11).

3. ALGUNOS PROBLEMAS DEL CÁLCULO NUMÉRICO

Para la resolución numérica del sistema de ecuaciones (2.9)-(2.10), utilizamos el esquema de diferencias finitas. Pero la propiedad de la condensación y del calor latente pueden crear oscilación en el cálculo. En efecto tenemos

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[\text{máx} \left(0, \pi_0 \frac{\rho(x)}{\rho_0} - \bar{\pi}_{vs}(T(x)) \right) \right] < 0$$

(cuando $\text{máx}(0, \pi_0 \frac{\rho(x)}{\rho_0} - \bar{\pi}_{vs}(T(x))) > 0$) y L_{gl} es bastante grande, lo que crea el efecto oscilatorio: si se valora T un poco más que el real, en la etapa sucesiva del cálculo se da un valor menos que el real y eso produce un valor más grande que el real en la etapa siguiente, amplificando siempre el error.

Para eliminar la aparición de esta oscilación en el punto donde inicia la condensación, utilizamos la aproximación siguiente de la derivada:

$$\frac{dw}{dx} \Big|_{x=i} \approx \frac{1}{\Delta_x} \left[\frac{7}{12} w(i+1) - \frac{1}{4} (w(i) + w(i-1) + \frac{1}{3} w(i-2)) \right],$$

donde Δ_x es el paso de la discretización; en esta definición los pasos ``pares" y los ``impares" tienen el mismo peso.

La misma propiedad del calor latente puede provocar oscilación también en la aproximación sucesiva. Para evitar eso, introducimos el esquema siguiente de iteración: sea dada la n -ésima aproximación $(w^{[n]}, T^{[n]})$; entonces pongamos

$$\rho^{[n]} = \frac{K_\rho \sqrt{1+h'^2}}{w^{[n]}}, \quad \bar{\pi}_{vs}^{[n]}(T^{[n]}) = \frac{\mu_h E_0}{R_0 T^{[n]}} \cdot 10^{\frac{7,63(T^{[n]}-273,15)}{T^{[n]}-31,25}}, \quad T^{[n]} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^{[k]}$$

(es decir, $\vartheta^{[n]}$ es el promedio de $T^{[k]}$, $k = 1, \dots, n$). Con esos valores pongamos

$$H_{gl}^{[n]} = \frac{w^{[n]}}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx} \left[\max(0, \pi_0 \frac{\rho^{[n]}(x)}{\rho_0} - \bar{\pi}_{vs}(\vartheta^{[n]}(x))) \right], \quad L_{gl}^{[n]} = (3244 - 2,72 \cdot \vartheta^{[n]}) \cdot 10^3.$$

Con $H_{gl}^{[n]}$ y $L_{gl}^{[n]}$ así definidos podemos resolver el sistema de la $n + 1$ -ima aproximación

$$K_\rho \frac{dw^{[n+1]}}{dx} = f_1 \frac{d^2 w^{[n+1]}}{dx^2} + f_2 w^{[n+1]} - \frac{RK_\rho}{\sqrt{1+h'^2}} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{1+h'^2} \frac{T^{[n+1]}}{w^{[n+1]}} \right) - K_\rho \frac{h'}{w^{[n+1]}} g - \alpha w^{[n+1]} + \gamma \quad (3.1)$$

$$c_v K_\rho \frac{dT^{[n+1]}}{dx} = \kappa \frac{d^2 T^{[n+1]}}{dx^2} - RK_\rho \sqrt{1+h'^2} \frac{T^{[n+1]}}{w^{[n+1]}} \frac{d}{dx} \left(\frac{w^{[n+1]}}{\sqrt{1+h'^2}} \right) + g_1 \left(\frac{dw^{[n+1]}}{dx} \right)^2 + g_2 w^{[n+1]} \frac{dw^{[n+1]}}{dx} + g_3 (w^{[n+1]})^2 + L_{gl}^{[n]} H_{gl}^{[n]}. \quad (3.2)$$

Las ecuaciones (2.9)-(2.10) son de segundo orden y las condiciones son puestas en los extremos del dominio. Pero los coeficientes de viscosidad η y ζ y de conductividad térmica κ son muy pequeños, de manera que no se puede utilizar el método habitual basado en el papel dominante de los términos de viscosidad y de conductividad térmica. Por eso utilizamos el método de "shooting" (su idea básica se encuentra en muchos manuales, por ejemplo Burden *et al* (2001) [4], Faragó (2014) [8]), resolviendo el problema de Cauchy con la condición en un extremo $w(0) = \bar{w}_0$, $T(0) = \bar{T}_0$ y la de la derivada de las funciones incógnitas en el mismo extremo $w'(0) = \beta_w$, $T'(0) = \beta_T$ con diferentes valores de β_w y β_T y escogiendo una solución que aproxima mejor la condición $w(L) = \bar{w}_1$, $T(L) = \bar{T}_1$ en el otro extremo del dominio. Se pueden considerar los valores $w(L)$, $T(L)$ como función de (β_w, β_T) ; pero la complejidad de nuestro sistema no permite utilizar propiedad de esta función. Por eso consideramos el dominio $0 < x < L$ con la parte muy regular en la proximidad del extremo $x = 0$, de manera que es suficiente examinar (β_w, β_T) en una vecindad muy pequeña de la derivada $(\bar{w}'(0), \bar{T}'(0))$ de la solución $(\bar{w}(\cdot), \bar{T}(\cdot))$ del sistema sin viscosidad y sin conductividad térmica.

4. RESULTADO DEL CÁLCULO NUMÉRICO

Consideremos el dominio

$$0 \leq x \leq 2 \cdot 10^5 \text{ m}$$

y la función $h(x)$

$$h(x) = \left(\frac{x-10^5}{8 \cdot 10^4} + 1 \right)^4 \left(\frac{x-10^5}{8 \cdot 10^4} - 1 \right)^4 \quad \text{si } 2 \cdot 10^4 \leq x \leq 18 \cdot 10^4,$$

$$h(x) = 0 \quad \text{si no;}$$

se observa que la cima del terreno representado por la función $h(x)$ es $h(x_1) = 1000$ (m), $x_1 = 10^5$ (m).

Utilizando los valores y los esquemas ya mencionados y los coeficientes $g = 9,8 \text{ gm}^2/\text{s}^2$, $c_v = \frac{5}{2} R = \frac{5 R_0}{2 \mu_a}$,

$\mu_a = 28,96 \text{ g/mol}$, $\alpha = 0,1$, $\gamma = 0,2$, $\eta = 120$, $\zeta = 40$, $\kappa = 100$ y poniendo las condiciones

$$w(0) = \bar{w}(0) = 2 \text{ m/s}, \quad w(2 \cdot 10^5) = \bar{w}(2 \cdot 10^5),$$

$$T(0) = \bar{T}(0) = 293,150 \text{ K}, \quad T(2 \cdot 10^5) = \bar{T}(2 \cdot 10^5),$$

$(\bar{w}(\cdot)$ y $\bar{T}(\cdot)$ son las soluciones de las ecuaciones con $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $\kappa = 0$; en nuestro caso tenemos $\bar{w}(2 \cdot 10^5) \approx 2 \text{ m/s}$, $\bar{T}(2 \cdot 10^5) \approx 293,150 \text{ K}$), obtenemos los resultados ilustrados en los grafos:

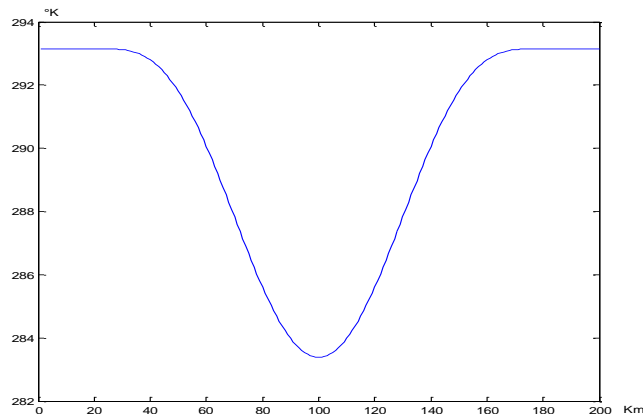


Figure 1 - Temperatura sin condensación

Figure 1 : Temperatura en el caso en que no hay la condensación,

Figure 2 : Temperatura en el caso $\frac{\pi_0}{\rho_0} = 1,2 \cdot 10^{-2}$,

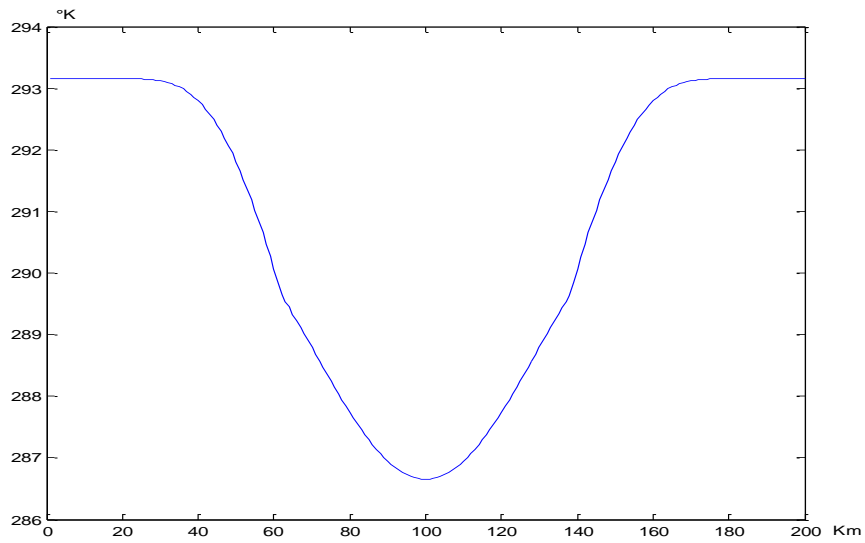


Figure 2 - Temperatura con condensación ($\frac{\pi_0}{\rho_0} = 1,2 \cdot 10^{-2}$)

Figure 3 : Velocidad en el caso en que no hay la condensación,

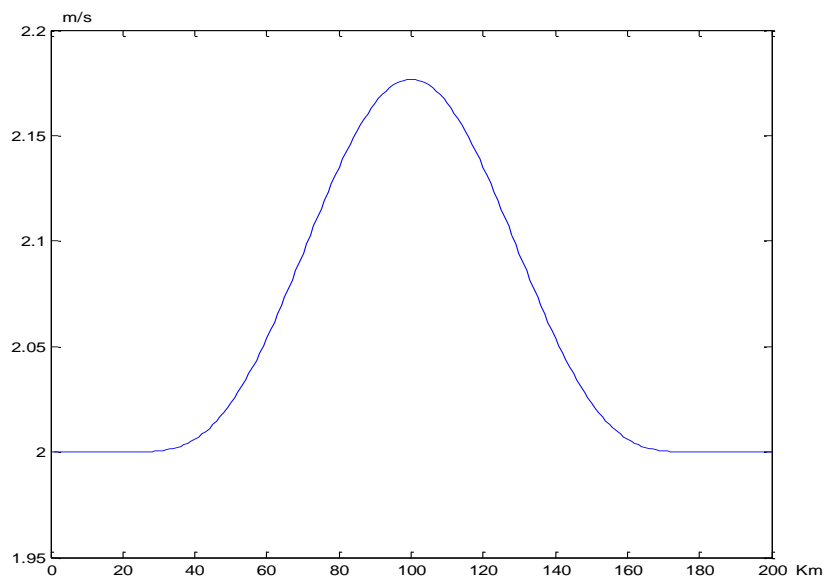


Figure 3 - Velocidad sin condensación

Figure 4 : Velocidad en el caso $\frac{\pi_0}{\rho_0} = 1,2 \cdot 10^{-2}$,

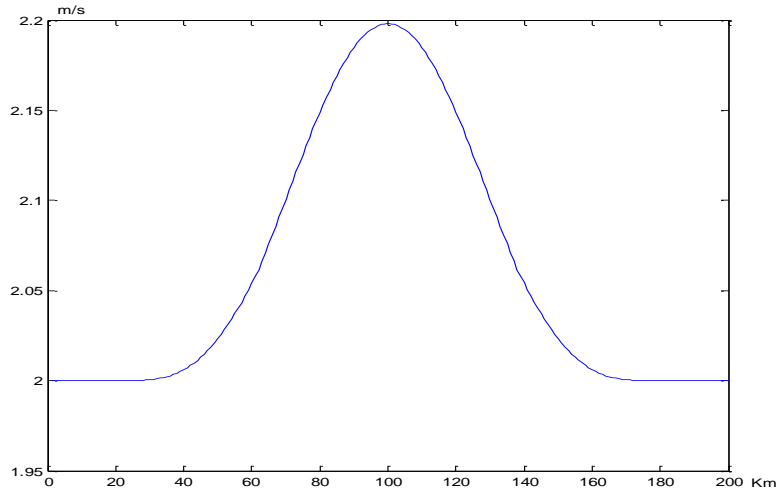


Figure 4 - Velocidad con condensación ($\frac{\pi_0}{\rho_0} = 1,2 \cdot 10^{-2}$)

Figure 5 : Cantidad del agua condensada en el caso $\frac{\pi_0}{\rho_0} = 1,2 \cdot 10^{-2}$;

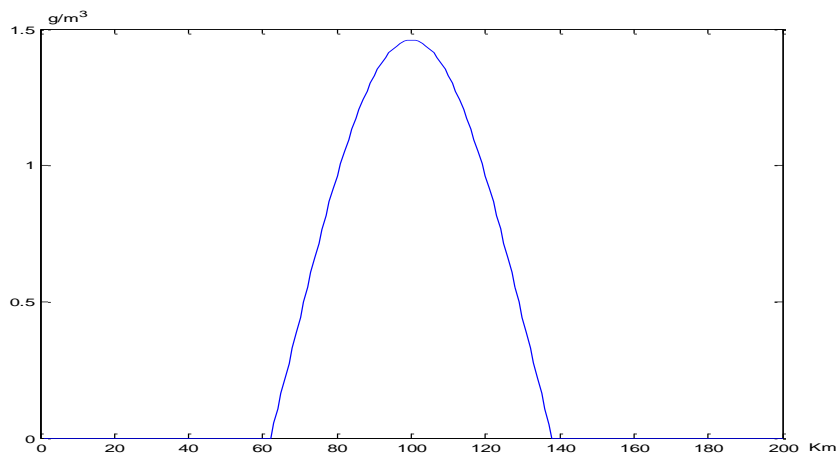


Figure 5 - Cantidad del agua condensada ($\frac{\pi_0}{\rho_0} = 1,2 \cdot 10^{-2}$)

aquí "caso en que no hay la condensación" significa el caso en que la densidad del vapor inicial π_0 es menor que el valor crítico, de manera que no provoca la condensación en ninguna parte, mientras que en el caso $\frac{\pi_0}{\rho_0} = 1,2 \cdot 10^{-2}$, como se ve en la Figure 5, hay la condensación. La cantidad del agua condensada ilustrada en la Figure 5 en este modelo es $E_l(x) = \max(0, \pi_0 \frac{\rho(x)}{\rho_0} - \bar{\pi}_{vs}(T(x)))$.

Ilustramos también en la tabla la cantidad máxima del agua condensada $E_{l,max}$ (en la cima 1000 m), la temperatura mínima T_{min} (en la cima 1000 m) y la diferencia entre la temperatura inicial $T_0 = 293,15 K$ y la temperatura mínima T_{min} en función de la densidad del vapor inicial π_0 (expresamos por π_0/ρ_0):

Las pruebas del cálculo con varios valores de η , ζ , κ , incluso cuando $\eta = \zeta = \kappa = 0$, muestran que el resultado esencialmente no depende de los valores de viscosidad y de conductividad térmica utilizados en el cálculo, a condición de que son bastante pequeños. Este hecho justifica también la elección del método de "shooting".

| π_0/ρ_0 | $E_{l,max}$ | T_{min} | $T_0 - T_{min}$ |
|-----------------------|-------------|-----------|-----------------|
| $0,876 \cdot 10^{-2}$ | 0 | 283,3865 | 9,7635 |
| $1,0 \cdot 10^{-2}$ | 0,6154 | 284,7525 | 8,3975 |
| $1,2 \cdot 10^{-2}$ | 1,4844 | 286,6018 | 6,5482 |
| $1,4 \cdot 10^{-2}$ | 2,3051 | 288,3121 | 4,8379 |

5. CONCLUSIÓN

Hemos conseguido resultados de cálculo que coinciden satisfactoriamente con lo que se espera de los datos de observación y el conocimiento teórico del valor del calor latente. Podemos decir que las ecuaciones fundamentales de la dinámica de los gases, con las leyes de la transición de fase del agua, sin utilizar la parametrización empírica, pueden determinar con exactitud suficiente los valores de la temperatura, de la velocidad del aire y la cantidad de la condensación en un flujo del aire. Nos parece que el método del cálculo utilizado es suficientemente simple y suficientemente eficaz; así podemos esperar aplicaciones de esta idea de cálculo a otros casos de fenómenos atmosféricos en que es presente la condensación del vapor de agua. En el presente trabajo no nos hemos ocupado de problemas en que está implicada la turbulencia. El estudio de flujos turbulentos es deseable, pero en nuestra opinión, requiere otros instrumentos teóricos y numéricos. Eso será uno de los temas de nuestra investigación futura.

RECEIVED JULY, 2014
REVISED JANUARY, 2015

REFERENCIAS

- [1] ANTONTSEV, S. N., KAZHIKHOV, A. V. and MONAKHOV, V. N. (1990): **Boundary value problems in mechanics of non homogeneous fluids** (translated from Russian). North-Holland, Amsterdam.
- [2] AYACHI, A., AISSAOUI, M. Z., GUEBAI, H. and FUJITA YASHIMA, H. (2014): **Système d'équations décrivant certains mouvements stationnaires en une dimension d'un gaz visqueux et calorifère**. Article submitted.
- [3] BENABIDALLAH, R., TALEB, L. and FUJITA YASHIMA, H. (2007): Existence d'une solution stationnaire d'un système d'équations d'un fluide visqueux compressible et calorifère modélisant la convection. **Bollettino U.M.I.** Ser. 8, 10-B: 1101-1124.
- [4] BURDEN, R. L. and FAIRES, D. J. (2001): **Análisis numérica** (7a ed.). I.T.P. Latin America.
- [5] CLARK, T. and HALL, W. D. (1991): Multi-domain simulations of the time dependent Navier-Stokes equations: Benchmark error analysis of some nesting procedures. **J. Comput. Phys.**, 92: 456-481.
- [6] COTTON, W., BRYN, G., VAN DEN HEEVER, S. (2011): **Storm and cloud dynamics** (II ed.). Academic Press, N. York.
- [7] FARAGÓ, I. (2014): **Numerical methods for ordinary differential equations**. Typo Tech (Budapest).
- [8] FARWIG, R. (1989): Stationary solutions of compressible Navier Stokes equations with slip boundary Conditions. **Commun. Part. Diff. Eq.**, 14: 1579-1606.
- [9] GHOMRANI, S., MARÍN ANTUÑA, J. and FUJITA YASHIMA, H. (2014): Un Modelo de la subida del aire ocasionado por la condensación del vapor y su cálculo numérico. } To appear in **Rev. Cubana Física**.
- [10] KIKOÏNE, A. K., KIKOÏNE, I. K. (1979): **Physique moléculaire** (traduit du russe). Mir, Moscou.
- [11] LANDAU, L. L., LIFCHITZ, E. M. (1989): **Mécanique des fluides (Physique théorique, tome 6)** (traduit du russe). Mir, Moscou.
- [12] LIONS, J.-L. (1973): **Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal**. Lecture Notes Math. 323, Springer.
- [13] MATVEEV, L. T. (1965, 1984, 2000): **Física de la atmósfera** (en ruso). Gidrometeoizdat, Moscou.
- [14] MATVEEV, L. T. (1981): **Dinámica de las nubes** (en ruso). Gidrometeoizdat, Moscou.
- [15] PLANCHE, C., WOBROCK, W., FLOSSMANN, A. I. TRIDON, F., LABBOUZ, L. and VBAELEN, J. (2013): Small scale topography influence on the formation of three convective systems observed during COPS over the Vosges Mountains. **Meteo. Zeitschr.**, 22: 395-411.
- [16] SKAMAROCK, W. C., KLEMP, J. B., DUDHIA, J, GILL, D. O., BARKER, D. M., DUDA, M. G., HUANG, X. Y., WANG, W. and POWERS, J. G. (2008): A description of the advanced research WRF Version 3. **NCAR/TN-475+STR, NCAR Technical note**, NCAR.
- [17] WOBROCK, W., FLOSSMANN, A. I. and FARLEY, R. D. (2003): Comparison of observed and modelled hailstone spectra during a severe storm over the Northern Pyrenean foothills. **Atmos. Res.**, 67-68: 685-703.