MATRICES ESCALONADAS Y METODOS PRIMAL DUAL DE PUNTO INTERIOR

Alibeit Kakes Cruz, Departamento de Matemática Aplicada, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana
Darnes Vilariño Ayala, Departamento de Computación, Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana

RESUMEN
Se particionan las filas de la matriz A de un modelo general de Programación Lineal en dos subconjuntos, B_1 y B_2, de manera que al aplicar un algoritmo primal-dual de punto interior, no se utilice A tal y como es dada por datos. La ecuación normal, usual en este tipo de métodos, toma la forma $B_1D^2B_1^t x = b$. La matriz B_2 es utilizada para obtener D^2. El objetivo último del trabajo es aplicar el resultado anterior a una clase particular de matrices escalonadas.

Palabras clave: Programación Lineal, Métodos de Punto Interior, algoritmos.

ABSTRACT
Given a general linear programming model, the set of rows of the matrix A is partitioned in two subsets, B_1 and B_2, which allows an interior point primal dual algorithm to deal with matrices of lower order. The normal equation associated with these methods takes the form $B_1D^2B_1^t x = b$. Matrix B_2 is used in the calculation of D^2. The ultimated purpose of the paper is the application of this result to a particular class of staircase matrices.

Key words: Linear Programming, Interior Point Methods, algorihtms.

MSC: 90C05

1. INTRODUCCION

Los métodos Primal Dual de Punto Interior resuelven los problemas primal y dual (Bazaraa-Sherali, Shetty (1993), Dantzing (1963), Monteiro-Adler (1996) a Monteiro- Adler (1996b)) de la Programación Lineal dados por (1) – (6). Los resuelven de una vez, aplicando variantes del método de Newton a las tres igualdades (7) – (9) y modificando las direcciones de búsqueda y tamaño de paso, de manera que la restricción (10) se satisfaga estrictamente en cada iteración. Esa condición, $x > 0, s > 0$, dio origen al término “algoritmo de punto interior”.

$$\min c^T x \tag{1}$$

s.a

$$Ax = b, \tag{2}$$

$$x \geq 0, \tag{3}$$

$$\max b^T \lambda \tag{4}$$

s.a

$$A^T \lambda + s = c, \tag{5}$$

$$s \geq 0, \tag{6}$$

$$A^T\lambda + s = c \tag{7}$$

$$Ax = b \tag{8}$$

$$x_i s_i = 0 \tag{9}$$

$$(x, s) \geq 0 \tag{10}$$

Las expresiones (7) - (10) definen una condición necesaria y suficiente de optimalidad (Bazaraa-Sherali-Shetty (1993), Dantzing (1963)), de x y (λ,s) de los problemas Primal y Dual dados por (1)-(3) y (4)–(6), respectivamente (Dantzing. (1963), Luemberger. (1973)).

Esquema general de los Métodos Primal Dual de Punto Interior Infactible

Dados (x_0, λ_0, s_0), $x_0 > 0$, $s_0 > 0$

Para $k = 0,1,2,\ldots$.

Resolver

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^k \\ \Delta\lambda^k \\ \Delta s^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_c \\ -r_b \\ -X^k S^k e + \sigma^k \mu^k e \end{bmatrix}$$

donde $\sigma_k \in [0,1]$ y $\mu_k = (x^k)^T s^k / n$;

hacer $(x^{k+1}, \lambda^{k+1}, s^{k+1}) \leftarrow (x^k, \lambda^k, s^k) + \alpha_k (\Delta x^k, \Delta\lambda^k, \Delta s^k)$,

eligiendo α_k de forma que $(x^{k+1}, s^{k+1}) > 0$.

Fin.

Como se observa, lo anterior es sólo un esquema, pues no contempla, por ejemplo, criterio de parada.

Los parámetros σ^k y μ^k son los parámetros de centrado y de medida de la brecha de dualidad, $c^t x - b^t \lambda$, respectivamente.

Ese esquema general conlleva a la aplicación de un método de Newton perturbado, donde $X = \text{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $S = \text{diag}(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $e = (1,1,\ldots,1)^T$.

$$r_b = Ax - b, \quad r_c = A^T \lambda + s - c.$$

De ese esquema general de algoritmo se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$A\Delta x = -r_b$$

$$A^t \Delta\lambda + \Delta s = -r_c$$

$$S\Delta x + X\Delta s = -XSe + \sigma\mu e$$

donde r_b y r_c son los residuos correspondientes.

Por despejes y sustituciones adecuadas se llega a las siguientes expresiones:

$$AD^2A^T \Delta\lambda = -r_b + A(S^{-1}X r_c + x - \sigma\mu S^{-1}e), \quad (11)$$

$$\Delta s = -r_c - A^T \Delta\lambda,$$

$$\Delta x = -x + \sigma\mu S^{-1}e - S^{-1}X \Delta s$$

donde $$D^2 = (S X^{-1})^{-1} \quad (12)$$

A la ecuación (11) se le conoce como "ecuación normal" (Gonzaga (1996), Monteiro-Adler (1996a), Monteiro-Adler (1996b)). De (12) y (11) se infiere que el cálculo de $\Delta\lambda$ manipula dos matrices inversas, D^2 para construir AD^2A^T, y luego la inversa de esta última matriz.

En el caso de un modelo lineal con variables acotadas, se tiene:

$$\begin{aligned} &\min c^t x \\ \text{sa}\quad & Ax = b, \\ & x \geq 0 \\ & x \leq v \end{aligned} \tag{13}$$

El modelo dual asociado al anterior se define así;

$$\begin{aligned} &\text{Max } b^t\lambda - v^t w \\ \text{sa}\quad & A^T\lambda - Iw + s = c \\ & w \geq 0,\ s \geq 0 \end{aligned}$$

Las condiciones de KKT para ese problema quedan expresadas como:

$$\begin{aligned} & Ax = b \\ & x + z = v \\ & A^T\lambda - w + s = c \\ & XSe = \mu e \\ & ZWe = \mu e \\ & (x,s,w,z) \geq 0 \end{aligned}$$

X, Z, S y W son matrices diagonales con x_j, z_j, s_j, w_j, en la diagonal. s y z variables de holguras en P y D respectivamente.

La fórmula de Newton produce un sistema de ecuaciones que finalmente da las expresiones que siguen para D^2 y la ecuación normal:

$$\Delta\lambda = (AD^2A^t)^{-1}[-r_b - AD^2(r_c + (W - S)e - \mu\left(Z^{-1} - X^{-1}\right)e]$$

$$D^2 = (Z^{-1}W + X^{-1}S)^{-1} \tag{14}$$

Las restricciones de acotación dadas por (13) pudieran ser estandarizadas y considerar $A = \begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix}$. Ese tratamiento aumenta la dimensión de la matriz a considerar en la ecuación normal. En nuestro caso, preferimos trabajar con la matriz original, no aumentando la dimensión de la matriz a considerar en (14). Las restricciones tipo (13) están implícitamente involucradas en (15), como se verá a continuación.

2. ECUACION NORMAL COMPACTADA

Se considera el siguiente modelo lineal, P:

$$\begin{aligned} &\min c^t x \\ \text{s.a}\quad & Ax = b \\ & Bx \leq d \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{15}$$

y su dual, D

$$\begin{array}{ll} & \max\ b^t\lambda - d^t\omega \\ \text{s.a} & A^t\lambda\ -\ B^t\omega\ \leq\ c \\ & \omega \geq 0 \end{array}$$

Las matrices A y B son de orden (k × n) y (p × n) respectivamente.

Estandarizando ambos problemas se tienen las condiciones de KKT.

$$Ax = b$$

$$Bx + Iz = d$$

$$A^t\lambda - B^t\omega + s = c$$

$$XSe = \mu e_n$$

$$ZWe = \mu e_p$$

$$x \geq 0,\ z \geq 0,\ w \geq 0,\ s \geq 0$$

X, S, Z, W matrices diagonales asociadas a los vectores x**,** s, z, w, respectivamente.

Se define,

$$F(x,z,\lambda,\omega,s) = \begin{pmatrix} Ax - b \\ Bx + Iz - d \\ A^t\lambda - B^t\omega + s - c \\ XSe - \mu e_n \\ ZWe - \mu e_p \end{pmatrix} = 0$$

Aplicando la fórmula de Newton;

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^t & -B^t & I \\ S & 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & W & 0 & Z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta z \\ \Delta\lambda \\ \Delta\omega \\ \Delta s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_b \\ -r_d \\ -r_c \\ -XSe + \tau\mu e_n \\ -ZWe + \tau\mu e_p \end{pmatrix}; \qquad (16)$$

donde

$$\begin{aligned} r_b &= Ax - b; \\ r_d &= Bx + z - d; \\ r_c &= A^t\lambda - B^t w + s - c \end{aligned}$$

X, Z, S y W son matrices diagonales asociadas a los vectores x,z,s, y w respectivamente.

De (16) se obtiene:

$$A\Delta x = -\ r_b \qquad (17)$$

$$B\Delta x + \Delta x = -\ r_d \qquad (18)$$

$$A^t\Delta\lambda - B^t\Delta\omega + \Delta s = -\ r_c \qquad (19)$$

$$S\Delta x + X\Delta s = - XSe + \tau\mu\, e_n \qquad (20)$$

$$W\Delta z + Z\Delta\omega = - WZe + \tau\mu\, e_p \qquad (21)$$

Despejando Δs en (20) y $\Delta\omega$ en (21):

$$\Delta s = -Se - \tau\mu\, X^{-1}e - X^{-1}S\,\Delta x \qquad (22)$$

$$\Delta\omega = -We + \tau\mu\, Z^{-1}e - Z^{-1}W\,\Delta z \qquad (23)$$

Sustituyendo (22) y (23) en (19):

$$A^t\Delta\lambda - B^t[-We + \tau\mu\, Z^{-1}e - Z^{-1}W\,\Delta z] - Se - \tau\mu\, X^{-1}e - X^{-1}S\,\Delta x = -r_c \qquad (24)$$

Despejando Δz en (18), sustituyendo en (24) y agrupando Δx :

$$(X^{-1}S + B^t Z^{-1}WB)\,\Delta x = r_{c\,+}\, B^tWe - \tau\mu\, B^t Z^{-1} e - B^t Z^{-1}Wr_d - Se - \tau\mu\, X^{-1}e + A^t\Delta\lambda$$

Definamos $$D^2 = (X^{-1}S + B^t Z^{-1}WB)^{-1} \qquad (25)$$

Finalmente, despejando Δx y sustituyendo en (17) se obtiene la ecuación normal.

$$AD^2A^t\Delta\lambda = -r_b - AD^2\left(r_c + B^tWe - B^tZWr_d - \tau\mu B^tZ^{-1}e + \tau\mu X^{-1}e - Se_n\right)$$

El resultado muestra que es posible resolver la ecuación normal no trabajando con la matriz $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$; sino trabajando primero con B y luego con A.

2.1. Ecuación normal en una clase particular de modelos escalonados

Los modelos que consideramos a continuación son frecuentes en la economía y en la industria, Fourer (1982), Glassey (1970), Izuno-Masuzawa (1989), Propoi (1988).

$$\min\ J(u) = a(T)x(T)$$

s.a

$$G(t)x(t) + D(t)\mu(t) \le f(t)$$

$$x(t + 1) = A(t)x(t) + B(t)\,\mu(t)$$

$$x(t) \ge 0$$

$$\mu(t) \ge 0$$

$$x(0)$$

dado

$$t = 0,1,...,T-1$$

Las matrices G(t); D(t); A(t) y B(t) y los vectores $f(t)$, x(t) y a(T) tienen dimensiones $m\times n$; $m\times r$; $n\times n$; $n\times r$; m; n; y n respectivamente.

Tales modelos tienen un sabor dinámico, basta considerar las desigualdades como las restricciones del problema, y las otras restricciones, como las ecuaciones de ligadura.

Luego de estandarizar el modelo anterior, la matriz del sistema tendría dimensión $(m + n)\,T \times (n + r + m)T$. Pero no se estandariza. Se particionan las filas de esa matriz, sin estandarizar, de manera que una parte de ella sea tomada como A en la ecuación normal y la otra forme parte de D^2. Presentaremos a continuación dos posibles filosofías de partición:

2.1.1. Partición I

Si desarrollamos primero las ecuaciones de ligadura y luego las restantes, se obtiene:

$$
\begin{array}{llllr}
A(0)X(0)-B(0)u(0) + I_n x(1) & & & & = 0 \\
 & -A(1)x(1)-B(1)u(1) + I_n x(2) & & & = 0 \\
 & & A(2)x(2)-B(2)u(2) + I_n x(3) & & = 0 \\
 & & & \cdots\cdots & \\
 & & & & \cdots\cdots \\
G(0)x(0)+D(0)u(0) & & & & \le f(0) \\
 & G(1)x(1)+D(1)u(1) & & & \le f(1) \\
 & & G(2)x(2)+D(2)u(2) & & \le f(2) \\
 & & & \cdots\cdots & \\
 & & & & \cdots\cdots
\end{array}
$$

Los coeficientes de las ecuaciones de ligadura formarán la matriz A asociada a la ecuación normal. La matriz B estará formada por los coeficientes de las desigualdades. La importancia de esa partición reside en que B resulta una matriz diagonal por bloques, con bloques $B(t) = \left[G(t) : D(t)\right]$.

La matriz $X^{-1}S + B^t Z^{-1}WB$ también resulta diagonal por bloques, pudiéndose escribir

$$X^{-1}S(t) + B^t(t)\, Z^{-1}W(t)B(t), \qquad \text{para } t = 0,..,T-1.$$

La matriz $X^{-1}S$ se particiona según las columnas de A y la matriz $Z^{-1}W$ según las filas de B(t), esto es, se parte de un punto estrictamente factible u(t) > 0, x(t) > 0, s(t) > 0. Con esos puntos se forma la matriz diagonal denotada por

$$X^{-1}S = \begin{pmatrix} \overline{U}(0) & & & & & & & \\ & \overline{X}(1) & & & & & & \\ & & \overline{U}(1) & & & & & \\ & & & \overline{X}(2) & & & & \\ & & & & \overline{U}(2) & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \overline{U}(4) & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Observe que la diagonal de esa matriz es solo una notación pues cada una de esas partes incluye valores de u(t), s(t), y x(t).

Finalmente:

$$D^2(t) = \left[X^{-1}S(t) + B^t(t)Z^{-1}W(t)B(t)\right]^{-1};\ t = 0,....,T-1$$

Esa partición permite el cálculo de AD^2A^t, invirtiendo primero, simultáneamente, T matrices del tipo $D^2(t)$; luego se resuelve la ecuación normal de orden nT × nT.

Otra forma de particionar la matriz del sistema, superior a nuestro juicio, es la siguiente.

2.1.2 Partición II

Definamos ahora una nueva partición de la matriz del sistema de estudio:

$$
\begin{pmatrix}
G(0) & D(0) & I_m(0) & & & & & & & & & \\
-A(0) & B(0) & I_n(1) & & & & & & & & & \\
 & & & & G(2) & D(2) & I_m(2) & & & & & \\
 & & & & -A(2) & -B(2) & I_n(3) & & & & & \\
 & & & & & & & & & G(4) & D(4) & I_m(4) \\
 & & & & & & & & & -A(4) & B(4) & I_n(5) \\
 & & G(1) & D(1) & & & & & & 0 & & \\
 & & -A(1) & -B(1) & I_n(2) & & & & & & & \\
 & & A(1) & B(1) & -I_n(2) & & & & & & & \\
 & & & & & & G(3) & D(3) & & & & \\
 & & & & & & -A(3) & -B(3) & I_n(4) & & & \\
 & & & & & & A(3) & B(3) & -I_n(4) & & & \\
 & & & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & & & &
\end{pmatrix}
$$

Observar que en la primera partición todas las ecuaciones de ligadura forman la primera clase de la partición, estando la segunda clase formada por las restricciones propias del problema. En esta partición se tomaron los primeros momentos en la primera clase quedando los últimos para la segunda. Cada momento tiene restricciones de igualdad y desigualdad, por ello para ser consecuente con (15) se tuvo la necesidad de estandarizar en las primeras ecuaciones y desdoblar en dos desigualdades la segunda clase de la partición.

Se define:

$$\overline{A}(t) = \begin{pmatrix} G(t) & D(t)\, I_m \\ -A(t) & -B(t)\, I_n \end{pmatrix}; \quad t = 0,2,4\ldots$$

$$\overline{B}(t) = \begin{pmatrix} G(t) & D(t) \\ -A(t) & -B(t)\, I_n \\ A(t) & B(t) - I_n \end{pmatrix}; \quad t = 1,3,5\ldots$$

$$
\overline{A} = \begin{pmatrix}
\overline{A}(0) & & & & & & \\
 & & \overline{A}(2) & & & & \\
 & & & & \overline{A}(4) & & \\
 & & & & & & \ddots \\
 & \overline{B}(1) & & & & & \\
 & & & \overline{B}(3) & & & \\
 & & & & & \ddots &
\end{pmatrix}
$$

Observando la disposición que tienen las variables, nos damos cuenta que las únicas que no tienen columnas asociadas en las matrices bloques de la segunda parte de la matriz del sistema son las variables $\mu(t)$; t = 0,2,.... Esa observación será utilizada en breve.

Sabemos que : $D^2 = (X^{-1}S + B^t Z^{-1}WB)^{-1}$

Estudiemos la matriz $X^{-1}S + B^t Z^{-1}WB$ para ver si esa nueva partición de las filas de la matriz del sistema, favorece su estructura.

La matriz $X^{-1}S$ se particiona según la matriz del problema que se resuelve. Llamemos $\overline{U}(t)$ y $\overline{X}(t)$ a las partes de $X^{-1}S$ formadas con los vectores $u(t)$ y $x(t)$ respectivamente. Podemos entonces escribir:

$$X^{-1}S = \begin{pmatrix} \overline{U}(0) & & & & & & & \\ & \overline{X}(1) & & & & & & \\ & & \overline{U}(1) & & & & & \\ & & & \overline{X}(2) & & & & \\ & & & & \overline{U}(2) & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \overline{U}(4) & \\ & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Definamos ahora:

$$X^{-1}S(t) = \overline{U}(t); \quad t = 0,2,4...$$

$$X^{-1}S(t) = \begin{pmatrix} \overline{X}(t) & & \\ & \overline{U}(t) & \\ & & \overline{X}(t+1) \end{pmatrix} \text{ ; t = 1,3...}$$

Ejemplifiquemos con T = 5, lo que ocurre.

Para que sea compatible la suma $X^{-1}S + B^t Z^{-1}WB$; expresemos B de la siguiente manera:

$$\overline{B} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{B}(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{B}(3) & 0 \end{pmatrix}$$

Los bloques de cero corresponden a las matrices que están en $\overline{A}(t)$ pero no en $\overline{B}(t)$.

$Z^{-1}W$ se particiona según las columnas de B.

Se tiene finalmente que $X^{-1}S + B^t Z^{-1}WB$ es igual a:

$$\begin{pmatrix} X^{-1}S(0) & & & \\ & X^{-1}S(1) & & \\ & & \ddots & \\ & & & X^{-1}S(4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \overline{B}^t(1) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \overline{B}^t(3) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^{-1}W(1) & \\ & Z^{-1}W(3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \overline{B}(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \overline{B}(3) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} X^{-1}S(0) & & & & \\ & X^{-1}S(1) + \overline{B}^t(1)Z^{-1}W(1)\overline{B}(1) & & & \\ & & X^{-1}S(2) & & \\ & & & X^{-1}S(3) + \overline{B}^t(3)Z^{-1}W(3)\overline{B}(3) & \\ & & & & X^{-1}S(4) \end{pmatrix}$$

De la matriz diagonal por bloques anterior; concluimos que:

$$D^2(t) = XS^{-1}(t); \qquad t = 0,2,...$$

$$D^2(t) = K^{-1}(t); \qquad t = 1,3,...$$

donde

$$K(t) = X^{-1}S(t) + \overline{B}^t(t)Z^{-1}W(t)\overline{B}(t)$$

3. CONCLUSIONES

1) Con ambas particiones se logra construir la ecuación normal sin invertir la matriz del sistema original. Parte de ella se utiliza para el cálculo de la matriz D^2, y ésta, junto a la parte restante dan lugar a la propia ecuación normal AD^2A^t.

2) Dos ventajas son evidentes en la segunda partición

- Parte de $D^2(t)$ resulta inmediatamente calculable (t = 0,2,...)
- Las inversas $K^{-1}(t)$ para t impar, pueden ser calculadas simultáneamente, es decir, en paralelo.

3) Como la matriz AD^2A^t resulta tridiagonal por bloques, [9], la ecuación normal aprovecha esa condición.

REFERENCIAS

BAZARAA, M.S.; H.D.SHERALI and C.M. SHETTY (1993): **Nonlinear Programming**, John Wiley & Sons, Inc. New York

DANTZING, G.B. (1963): **Linear Programming and Extensions**, Princeton University Press, New Jersey.

FOURER, R. (1982): "Solving staircase linear programs by the simplex method, 1: inversión. 2: Priacing", **Mathematical Programming** 23 , 274- 313.

FUJISAWA, K. (1997): "Exploiting Sparsity in primal dual interior algorithm for linear programming", **Mathematical Programming** 61, 79.

GLASSEY, C.R. (1970): "Dynamic Linear Programming for Production Scheduling", **Operations Research** 18(1).

GONDZIO, J. and J.P. VIAL (1967): "Using an interior point methods for the master problem in a descomposition approach", **European Journal of Operational Research** 101.

GONZAGA, C.C. (1996): "Complexity of Predictor–Corrector algorithms", **Tecnhical Report**. Department of Mathematics University of Geneva.

JI, J.; F. POTRA, R.A: TAPIA and Y. ZHANG (1991): "An interior Method with Polynomial Complexity and Superlinear Convergence for Linear Complementarity Problems", Department of Mathematical of Sciences, Rice University.

KAKES, A. (2000): Tesis de Doctorado. Universidad de La Habana, Departamento de Matemáticas Aplicadas.

LUEMBERGER, D.G.. (1973): **Introduction to linear and nonlinear programming**. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., New York.

MIZUNO, S. and K. MASUZAWA (1989): "Polynomial time interior point algorithms for transportation problems", **Journal of the Operation Research Society of Japan**, 32 , 371-382.

MIZUNO, S.; M. KOJIMA and M.J. TODD (1995): "Infeasible interior point primal dual potencial reduction algorithms for linear programming", **SIAM Journal of Optimization**.

MONTEIRO, R.D.C.and I. ADLER. (1996a): "Interior path following primal-dual algorithms", Part I : "Linear Programming". **Mathematical Programming** 44, 27- 41. North -Holland.

___________________________ (1996b): "Interior path following primal-dual algorithms", Part II: "Convex Quadratic Programming", **Mathematical Programming** 44, 43-66. North-Holland.

PROPOI, A.I. (1988): **Problems of dynamic linear programming**, Luxenburgo (Austria) IIASA. RM 76-78.

TAPIA, R.A.; Y. ZHANG and Y. YE. (1991): **On the convergence of the iteration sequence in primal - dual interior - point methods**, Department of Mathematical of Sciences , Rice University.

TOMLIN. J.A. (1989). "A note on comparing Simplex and Interior Methods for Linear Programming", **Mathematics of Operations Research** 15, 508-529.